Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2018

Klausur Mathematische Logik

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:
Studiengang:

Rerun LaTeXto create point data

Hinweise

Unsere Regeln für die Klausur: Es sind *keine* Hilfsmittel (Skripte, Bücher, Mitschriften oder dergleichen) zugelassen.

Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Geben Sie alle Aufgabenblätter mit ab.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hiermit bestätige ich, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und prüfungsfähig bin.

____
Unterschrift

Aufgabe 1 18 Punkte

Im Folgenden bezeichnen $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}$ beliebige Mengen von AL-Formeln, $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ beliebige Formeln der Aussagenlogik und X, Y, Z aussagenlogische Variablen. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Behauptungen (für jede Wahl von $\Phi, \Psi, \varphi, \psi, \dots$) wahr sind. Ist die Behauptung wahr, so begründen Sie dies (etwa kurze Beweisskizze, Ergebnis aus der Vorlesung, ...). Ist die Behauptung falsch, so geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei φ eine erfüllbare Formel. Dann ist die Formel $\neg\varphi$ unerfüllbar.

(b) Angenommen es gilt $\varphi \equiv \psi$. Dann gilt: φ ist eine Formel in KNF genau dann, wenn ψ eine Formel in KNF ist.

(c) Angenommen $X \vee Y \models \varphi$. Dann ist φ nicht äquivalent zu einer Horn-Formel.

(d) $(X \wedge \neg Y) \vee Z$ ist äquivalent zu einer Horn-Formel.

(e) Angenommen φ ist eine AL-Formel, welche genau ein Modell besitzt (über ihrer Variablenmenge). Dann ist φ äquivalent zu einer Horn-Formel.

(f) Seien $\varphi(X_1, \ldots, X_n), \psi(X_1, \ldots, X_n) \in$ AL erfüllbare Horn-Formeln mit $\varphi \equiv \psi$. Dann gibt der Markierungsalgorithmus angewendet auf φ und ψ das gleiche Modell aus.

(g) Angenommen Ψ ist eine unendliche Menge und $\Phi \subseteq \Psi$ eine endliche Teilmenge. Dann gilt: Ist Φ erfüllbar, so ist auch Ψ erfüllbar.

(h) Angenommen $\Phi \models \varphi \vee \psi$. Dann existiert eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Phi$, so dass $\Delta \cup \{\neg\varphi\} \Rightarrow \psi$ eine gültige Sequenz der Aussagenlogik ist.

Aufgabe 2 11 Punkte

(a) Weisen Sie mittels der Resolutionsmethode nach, ob folgende Klauselmenge erfüllbar ist.

$$\{\{\neg Z\}, \{\neg Y, \neg X\}, \{Y, X\}, \{Y, \neg X\}, \{\neg Y, Z\}\}$$

(b) Nutzen Sie die Resolutionsmethode, um die Folgerungsbeziehung nachzuweisen:

$$\{\neg Z, Y \rightarrow X, X \rightarrow W, \neg W \vee \neg X\} \models \neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$$

(c) Geben Sie mit kurzer Begründung an, welche der folgenden Sequenzen Axiome sind.

(i) $Y \;\Rightarrow\; X, \neg X$

(ii) $X, ((\neg X \vee Y) \wedge (Z \rightarrow \neg Y)) \rightarrow (X \wedge Y) \;\Rightarrow\; Y, ((\neg X \vee Y) \wedge (Z \rightarrow \neg Y)) \rightarrow (X \wedge Y)$

(d) Begründen Sie *semantisch*, d.h. nicht mittels Ableitungen im Sequenzenkalkül, ob folgende Schlussregel korrekt ist.

$$\frac{\Gamma, \varphi \;\Rightarrow\; \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \;\Rightarrow\; \Delta, \neg\varphi}$$

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Geben Sie ein Modell der modallogischen Formel $\Box 0$ an.

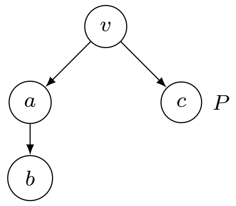
(b) Formulieren Sie folgende Aussagen als Formeln in der Modallogik, oder zeigen Sie, dass dies nicht möglich ist.

(i) Vom aktuellen Knoten aus ist in maximal 3 Schritten ein Terminalknoten erreichbar.

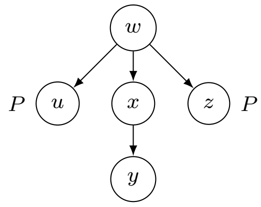
(ii) Der aktuelle Knoten liegt auf einem Kreis der Länge 4.

(c) Geben Sie eine Bisimulation Z an, die zeigt, dass $\mathcal{K}_1, v \sim \mathcal{K}_2, w$ gilt.

$\mathcal{K}_1$:

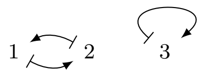


$\mathcal{K}_2$:



Aufgabe 4 20 Punkte

(a) Sei $\mathfrak{A} = (A = \{1, 2, 3\}, f^{\mathfrak{A}})$, wobei die einstellige Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ durch die Pfeile in der folgenden Zeichnung definiert ist:



(i) Geben Sie (mit Begründung) die Universen aller Substrukturen von $\mathfrak{A}$ an.

(ii) Geben Sie eine Kongruenzrelation $\sim$ auf $\mathfrak{A}$ an, sodass $a \neq b$ existieren mit $a \sim b$.

(iii) Geben Sie die Faktorstruktur $\mathfrak{A}/_{\sim}$ zu Ihrer Relation $\sim$ an.

(iv) Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, wobei $\mathfrak{A}$ weiter die Struktur $(\{1, 2, 3\}, f^{\mathfrak{A}})$ bezeichnet, dann gibt es einen Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr sind.

(i) $\forall x \exists y (y \in \mathbb{N} \wedge x + y = x)$ ist ein FO($\{+, \cdot\}$)-Satz.

(ii) Sei $\varphi(x)$ eine FO($\{+\}$)-Formel mit einer freien Variable, sodass $(\mathbb{N}, +) \models \varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist φ allgemeingültig.

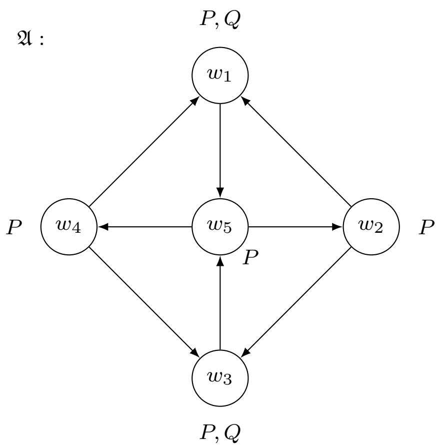
(iii) Die Menge $\Phi = \{\neg\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y \bigvee_{1 \leq i \leq n} y = x_i : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ist erfüllbar.

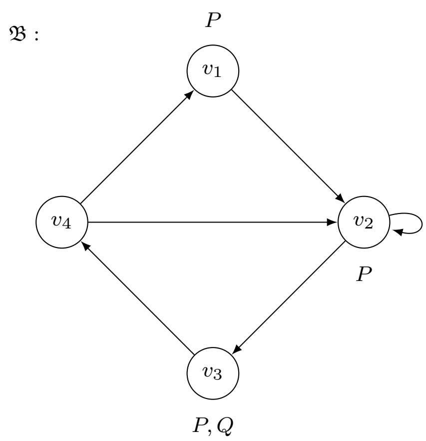
(iv) Sei c ein Konstantensymbol, f ein einstelliges Funktionssymbol und sei R ein zweistelliges Relationssymbol. Es gibt zwei verschiedene Herbrandstrukturen mit der Signatur $\{c, f, R\}$.

(v) Es gibt einen Algorithmus der, gegeben eine endliche Menge Φ von FO-Sätzen, entscheidet, ob Φ ein Modell hat.

Aufgabe 5 22 Punkte

(a) Sei $\varphi := \exists x(Px \land \forall y(\neg Eyx \lor Qy))$. Welche der folgenden Strukturen sind Modell von φ? Begründen Sie Ihre Antworten!





(b) Drücken Sie die folgenden Eigenschaften von gerichteten Graphen in $\mathrm{FO}(\{E\})$ aus:

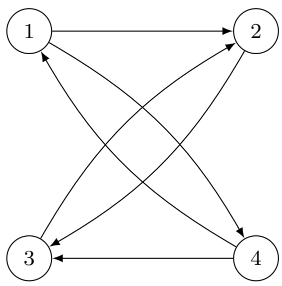
(i) Von jedem Knoten ist jeder andere Knoten über einen Pfad der Länge *höchstens* 2 erreichbar. (Die Länge eines Pfades ist die Anzahl der verwendeten Kanten.)

(ii) Es gibt einen Knoten ohne Selbstkante, dessen ausgehende Kanten nur zu Knoten mit Selbstkanten führen.

(iii) Der Graph enthält einen gerichteten Kreis der Länge 42 als *Substruktur*.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass folgende Elemente/Relationen in den angebenen Strukturen elementar definierbar sind:

(i) Der Knoten 1 in dem folgenden gerichteten Graphen:



(ii) Die Menge $\{2^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ in $(\mathbb{N}, +, \cdot, 1)$.

(iii) Die Relation $\left\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2,\ a \neq 0 \neq b\right\}$ in $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +, \cdot, 1)$.

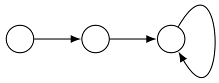
Aufgabe 6 17 Punkte

(a) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen und $m \in \mathbb{N}$. Wann heißen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ m-äquivalent? Wann heißen sie elementar äquivalent?

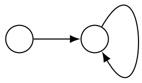
(b) Formulieren Sie den Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé.

(c) Geben Sie für die folgenden Paare von Strukturen jeweils mit kurzer Begründung an, ob sie elementar äquivalent sind. Falls die Strukturen nicht elementar äquivalent sind, geben Sie eine FO-Formel von minimalem Quantorenrang an, welche die Strukturen trennt.

(i) Die gerichteten Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die wie folgt aussehen:



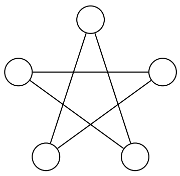
$\mathfrak{A}$



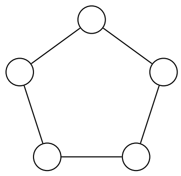
$\mathfrak{B}$

(ii) Die beiden ungerichteten Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die durch folgende Bilder gegeben sind:

$\mathfrak{A}$:



$\mathfrak{B}$:



(iii) $\mathfrak{A} = (\{r \in \mathbb{R} : 0 < r < 10\}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\{q \in \mathbb{Q} : -1 < q < 1\}, <)$.

Aufgabe 7 22 Punkte

(a) Seien $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ und $\varphi \in \mathrm{FO}$. Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an:

- $\Phi \models \varphi$,
- $\Phi \vdash \varphi$,
- Φ ist erfüllbar,
- Φ ist konsistent.

(b) Geben Sie den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik an.

(c) Sei E ein zweistelliges Relationssymbol. Wir wollen die Klasse $\mathcal{K}$ aller Graphen, in denen für jede natürliche Zahl n ein Weg[1] der Länge mindestens n vorkommt, axiomatisieren. Im Folgenden sind zwei Axiomensysteme gegeben, von denen genau eines diese Klasse axiomatisiert. Geben Sie das korrekte Axiomensystem an und begründen Sie, indem Sie ein passendes Gegenbeispiel angeben, weshalb das Andere die Klasse nicht axiomatisiert.

$$\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{>1}\}, \quad \text{wobei } \varphi_n := \forall x_1 \cdots \forall x_n \big(\big(\bigwedge_{1 \leq i < n} E x_i x_{i+1} \big) \to \exists y\, E x_n y \big)$$

$$\Psi := \{\psi_n : n \in \mathbb{N}_{>1}\}, \quad \text{wobei } \psi_n := \exists x_1 \cdots \exists x_n \big(\bigwedge_{1 \leq i < n} E x_i x_{i+1} \big)$$

(d) Im Folgenden bezeichnen f, g jeweils einstellige Funktionssymbole. Geben Sie für folgende Klassen von Strukturen jeweils ein – sofern möglich endliches – Axiomensystem $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\{f, g\})$ an. Sollten Sie kein (endliches) Axiomensystem angeben, so beweisen Sie, dass es kein (endliches) Axiomensystem gibt.

(i) $\mathcal{K}_1 := \{(A, f, g) : f = g^{-1}\}$

[1] Auf einem Weg dürfen Knotenwiederholungen vorkommen.

(ii) Sei M eine beliebige Menge mit $|M| \geq |\mathbb{N}|$. $\mathcal{K}_2 := \{A : |A| \leq |M|\}$

(iii) $\mathcal{K}_3 := \{(A, f) : \mathrm{Bild}(f) \text{ ist endlich}\}$