

Aufgabe 1

- (a) Geben Sie alle Redukte der Struktur $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ an.
- (b) Geben Sie für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ die kleinste Substruktur von $(\mathbb{Z}, +, -)$ an, welche m und n enthält. Ist dies eine echte Substruktur?

Aufgabe 2

Wir betrachten endliche Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Ein Wort $w = w_0 \cdots w_{n-1}$ entspricht der Struktur

$$\mathfrak{w} := (\{0, \dots, n-1\}, <, P_a, P_b),$$

wobei $<$ die übliche lineare Ordnung ist, und $i \in P_j$ genau dann gilt, wenn $w_i = j$.

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen $\text{FO}(\{<, P_a, P_b\})$ -Satz an, der diese definiert.

- (a) $\{w \in \Sigma^* : w_0 = a \text{ und } w_{n-1} = b \text{ wobei } n = |w|\}$
- (b) $\{w \in \Sigma^* : abba \text{ kommt als Infix in } w \text{ vor}\}$
- (c) $\{w \in \Sigma^* : ba \text{ kommt nicht als Infix in } w \text{ vor}\}$
- (d) $\{w \in \Sigma^* : \text{ hinter jedem } a \text{ in } w \text{ kommt noch mind. ein } b\}$