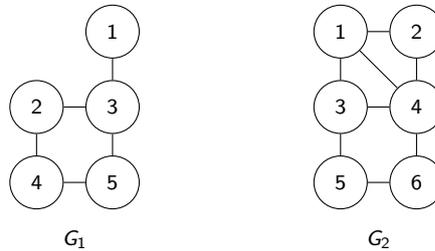


### Aufgabe 1

(a) Welche Automorphismen haben die folgenden (ungerichteten) Graphen?



(b) Wie viele elementar definierbare Knotenmengen gibt es in  $G_1$  bzw. in  $G_2$ ?

(c) Zeigen Sie, dass  $G_1 \not\cong_3 G_2$  gilt.

(d) Sei  $\mathcal{K}_4$  die Klasse aller ungerichteten Graphen mit genau 4 Knoten. Für jeden solchen Graphen  $G \in \mathcal{K}_4$  sei  $m_G$  die Anzahl der elementar definierbaren Knotenmengen in  $G$ . Welchen Wert hat  $\max \{m_G : G \in \mathcal{K}_4\}$ ?

Begründen Sie Ihre Antworten!

### Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Theorie  $T_{dl}$  der dichten linearen Ordnungen nicht vollständig ist.

(b) Sei  $\tau = \{P, Q\}$  mit einstellig Relationssymbolen  $P$  und  $Q$ . Zeigen Sie, dass die Theorie der  $\tau$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$ , in denen  $P^{\mathfrak{A}}$  und  $Q^{\mathfrak{A}}$  unendlich sind und eine Partition des Universums bilden, vollständig ist. Bleibt die Theorie vollständig, auch wenn  $P^{\mathfrak{A}}$  und  $Q^{\mathfrak{A}}$  keine Partition bilden?

### Aufgabe 3

Betrachten Sie  $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, +)$ . Für jedes  $m \in \mathbb{N}$  sei die zweistellige Relation  $\sim_m$  auf  $\mathfrak{A}$  wie folgt definiert:  $a \sim_m b$  gelte genau dann wenn  $|a - b|$  ein Vielfaches von  $m$  ist.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes  $m$  die Relation  $\sim_m$  eine Kongruenzrelation auf  $\mathfrak{A}$  ist.

(b) Geben Sie in Abhängigkeit von  $m$  die Faktorstruktur  $\mathfrak{A}/\sim_m$  an. Wie viele Äquivalenzklassen hat sie? Für welches  $m$  ist  $\mathfrak{A}/\sim_m \cong \mathfrak{A}$ , und für welches  $m$  ist  $\mathfrak{A}/\sim_m$  einelementig?