Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

SS 2021

2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Montag, den 03.05., um 12:00 Uhr, online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Organisatorische Hinweise (der Übungsbetrieb läuft über den Moodle-Lernraum):

- Bitte geben Sie Ihre Lösungen **online** im Moodle-Lernraum der Veranstaltung ab.
- Bitte geben Sie in **Gruppen von 3 bis 4 Personen** ab.
- Geben Sie bitte alle **Namen und Matrikelnummern** oben rechts auf Ihrer Lösung an.
- Abgaben müssen mit unserer LaTeX-Vorlage erstellt und im **PDF-Format** hochgeladen werden.
- Sie erhalten die Korrekturen online in Moodle. Fragen können Sie im Forum stellen.
- Im Moodle-Lernraum finden Sie hier mehr Hinweise zur Übungsabgabe.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 2" zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $2 + 2 + 4$ Punkte

Wir definieren die Booleschen Funktionen $m\colon B^4 \to B$ und $u\colon B^3 \to B$ durch

$$m(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{cases} 1 - x_4 & \text{falls } x_1 = x_4, \\ x_3 \cdot x_2 & \text{falls } x_1 \neq x_4 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$u(x_1, x_2, x_3) := 1 \quad \text{gdw.} \quad |\{i \in \{1, 2, 3\} \mid x_i = 1\}| \text{ ungerade,}$$

d.h. als Formel gilt $u(x_1, x_2, x_3) \equiv ((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{m\}$ funktional vollständig ist.

(b) Widerlegen Sie formal mithilfe einer geeignete Induktion, dass die Menge $\{\to, u, 1\}$ funktional vollständig ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\vee, \wedge, 0, 1, f\}$ funktional vollständig ist, wobei f eine beliebige, nicht-monotone Boolesche Funktion ist.

Hinweis: Eine Boolesche Funktion $f \in B^n$ heißt monoton, wenn für $a, b \in \{0, 1\}^n$ aus $a \leq b$ auch $f(a) \leq f(b)$ folgt. Dabei bedeutet $a \leq b$ für Tupel $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$, dass $a_i \leq b_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Aus der nicht-Monotonie von f folgt nun, dass Belegungen $a, b \in \{0, 1\}^n$ existieren, sodass $a \leq b$, aber $f(a)$ *nicht* kleiner oder gleich $f(b)$ ist, also $f(a) \not\leq f(b)$. Definieren Sie mithilfe dieser Belegungen und der Funktion f die Negation $\neg$.

Aufgabe 3 3 + 3 Punkte

Verwenden Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, um folgende Fragen zu beantworten. Geben Sie dabei für jeden Schritt die Menge der markierten Variablen an.

(a) Bestimmen Sie das minimale Modell der folgenden Formel.

$$(E \wedge B \to 0) \wedge (1 \to B) \wedge (D \to F) \wedge (D \wedge B \to A) \wedge (A \wedge C \to E) \wedge (B \to D)$$

(b) Gilt die folgende Folgerungsbeziehung?

$$\underbrace{\{\neg X \vee Z, X \to (Y \vee \neg Z)\}}_{=:\Phi} \models \underbrace{\neg X \vee (X \wedge Z \wedge Y)}_{=:\psi}$$

Aufgabe 4 3 + 2 + 3 Punkte

Für zwei Interpretationen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 \colon \tau \to \{0,1\}$ schreiben wir $\mathfrak{I}_1 \leq \mathfrak{I}_2$, wenn $\mathfrak{I}_1(X) \leq \mathfrak{I}_2(X)$ für alle $X \in \tau$ gilt. Außerdem definieren wir den *Schnitt* $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)$ als die Interpretation

$$(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) \colon \tau \to \{0,1\}, \quad (\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X) \coloneqq \min\{\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X)\} \quad \text{für alle} \quad X \in \tau.$$

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Modelle von Horn-Formeln unter Schnitt abgeschlossen sind, d.h., dass für Horn-Formeln φ aus $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$ auch $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) \models \varphi$ folgt.

(b) Beweisen Sie, dass alle erfüllbaren Horn-Formeln ein eindeutiges kleinstes Modell besitzen, d.h., wenn eine Horn-Formel φ erfüllbar ist, dann gibt es stets ein Modell $\mathfrak{I} \models \varphi$, sodass für alle Modelle $\mathfrak{I}' \models \varphi$ folgt, dass $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}'$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Formeln äquivalent zu einer Horn-Formel sind.

Hinweis: Nutzen Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse aus den anderen Aufgabenteilen.

(i) $\varphi_1 \coloneqq ((T \wedge \neg U) \wedge ((S \vee R) \to (S \wedge R))) \vee \neg((T \wedge R \wedge U) \to S)$

(ii) $\varphi_2 \coloneqq (\neg A \to (B \vee C)) \wedge (\neg B \to (A \vee C)) \wedge (\neg C \to (A \vee B))$

Aufgabe 5 2 + 2 + 2 Punkte

Seien $\psi, \vartheta \in \mathsf{AL}$ und $\Phi, \Psi \subseteq \mathsf{AL}$ aussagenlogische Formeln bzw. Formelmengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Wenn Ψ endlich ist und $\Phi \models \bigwedge \Psi$, dann gilt $\Phi \models \bigwedge \Psi_0$

(i) für alle $\Psi_0 \subseteq \Psi$ bzw.

(ii) für alle endlichen $\Psi_0 \supseteq \Psi$.

(b) Wenn $\Phi \models \psi$ und $\Phi \models \neg\psi$, dann ist Φ unerfüllbar.

(c) Wenn $\Psi_0 \supseteq \Psi_1 \supseteq \Psi_2 \supseteq \dots$ und $\Psi_i \models \vartheta$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann folgt $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Psi_i \models \vartheta$.

Aufgabe 6 5 Punkte

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls es eine Partition der Knoten $V := W_0 \dot\cup W_1$ in genau zwei Mengen W_0 und W_1 gibt, sodass jeweils keine Kanten innerhalb von W_0 und W_1 existieren, d.h., es darf nur Kanten mit jeweils einem Endpunkt in W_0 und einem Endpunkt in W_1 geben. Zeigen Sie, dass ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ *genau* dann bipartit ist, wenn jeder endliche Teilgraph $H = (V', E')$ von G bipartit ist.

Hinweis: Formalisieren Sie eine Partition der Knoten $V := W_0 \dot\cup W_1$ des ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit den Aussagenvariablen $\tau_G := \{X_v \mid v \in V\}$. Wenden Sie dann den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik auf eine geeignete Formelmenge an.