Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

SS 2021

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Montag, den 10.05., um 12:00 Uhr, online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 3“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $3 + 3$ Punkte

Eine Klausel C nennen wir *tautologisch*, wenn sie ein Literal sowohl negiert als auch nicht-negiert enthält, d.h., wenn es ein Literal X mit $\{X, \overline{X}\} \subseteq C$ gibt.

Wir definieren nun eine Variante des Resolutionskalküls: den *bereinigten* Resolutionskalkül. Dabei werden neu gebildete Resolventen C bei der Resolution nur behalten, falls

(i) sie nicht tautologisch sind und

(ii) keine der bereits gebildeten Resolventen C' eine Teilmenge von C ist.

Resolventen, die diese Kriterien nicht erfüllen, werden sofort verworfen. Analog zur Definition aus der Vorlesung definieren wir für jede Klauselmenge K einen *bereinigten* Resolutionsschritt als

$$\begin{aligned}\mathsf{PRes}(K) := K \cup \{C \mid\ & C \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } K\text{, wobei}\\ & C \textit{ nicht} \text{ tautologisch ist und}\\ & \textit{keine} \text{ Klausel } C' \in K \text{ mit } C' \subseteq C \text{ existiert.}\}\end{aligned}$$

Durch Iteration dieses Verfahrens ergeben sich wie in der Vorlesung die Mengen

$$\begin{aligned}\mathsf{PRes}_0(K) &:= K,\\ \mathsf{PRes}_{i+1}(K) &:= \mathsf{PRes}(\mathsf{PRes}_i(K)) \quad \text{für } i \in \mathbb{N} \quad \text{und}\\ \mathsf{PRes}^*(K) &:= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathsf{PRes}_i(K).\end{aligned}$$

Sie dürfen zunächst ohne Beweis annehmen, dass der bereinigte Resolutionskalkül vollständig ist.

(a) Zeigen Sie mit dem *Resolutionskalkül aus der Vorlesung*, dass die folgende Folgerungsbeziehung gilt.

$$\{A \lor E \lor D, (D \to B) \land \neg(C \to (D \land B))\} \models A \lor (E \land C)$$

(b) Zeigen Sie *mithilfe der bereinigten Resolution*, dass die folgende Klauselmenge erfüllbar ist. Geben Sie dabei für alle Schritte $i = 1, 2, \ldots$ deutlich an, welche bereinigten Resolventen neu gebildet wurden, also $(\mathsf{PRes}_1(K) \setminus \mathsf{PRes}_0(K))$, $(\mathsf{PRes}_2(K) \setminus \mathsf{PRes}_1(K))$, $\ldots$.

$$K := \{\{\neg A, B, D\}, \{\neg B, \neg D\}, \{A\}, \{\neg E, D\}, \{C\}, \{C, \neg B\}, \{E\}\}$$

Hinweis: Achten Sie darauf, sich genau an die Definition von PRes zu halten.

Aufgabe 3 2 + 7 Punkte

Betrachten Sie den bereinigten Resolutionskalkül aus der vorherigen Aufgabe. Wir untersuchen nun die Korrektheit und Vollständigkeit des Verfahrens.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass der bereinigte Resolutionskalkül korrekt ist.

(b) Beweisen Sie, dass der bereinigte Resolutionskalkül vollständig ist.

Hinweis: Zeigen Sie per Induktion über $i \in \mathbb{N}$, dass für alle nicht-tautologischen „ursprünglichen“ Klauseln $C \in \mathsf{Res}_i(K)$ eine „bereinigte“ Klausel $C' \in \mathsf{PRes}_i(K)$ mit $C' \subseteq C$ existiert.

Nutzen Sie zur Behandlung von tautologischen Klauseln die Beobachtung, dass für eine tautologische Klausel $C_1 \supseteq \{X, \overline{X}\}$ die Resolvente C mit einer beliebigen Klausel C_2 immer selbst tautologisch ist (wenn man nicht über X resolviert) oder eine Obermenge von C_2 ist, d.h. $C \supseteq C_2$ (wenn man über X resolviert).

Aufgabe 4 4 + 3 Punkte

Wir erweitern den Äquivalenzbegriff auf aussagenlogische Formelmengen $\Phi, \Psi \subseteq \mathsf{AL}$, indem wir festlegen, dass $\Phi \equiv \Psi$, wenn für jede Interpretation $\mathfrak{I}$, die passend für Φ und Ψ ist, $\mathfrak{I} \models \Phi$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{I} \models \Psi$. Für Formeln $\psi \in \mathsf{AL}$ schreiben wir $\Phi \equiv \psi$ als Kurzschreibweise für $\Phi \equiv \{\psi\}$.

Außerdem nennen wir die Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ *abhängig*, wenn es eine Formel $\varphi \in \Phi$ gibt, sodass $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$ (wenn es keine solche Formel gibt, dann ist Φ *unabhängig*).

Sei $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ eine aussagenlogische Formlemenge. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(a) Φ ist genau dann abhängig, wenn bereits eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ abhängig ist.

(b) Wenn $\Phi \equiv \psi$ für eine aussagenlogische Formel $\psi \in \mathsf{AL}$, dann gilt bereits $\Phi_0 \equiv \psi$ für eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

Aufgabe 5 7 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir Teilmengen der natürlichen Zahlen, also Elemente aus $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ nennen wir *benachbart*, wenn man eine der Mengen durch Hinzufügen eines neuen Elements in die andere erhalten kann, d.h., wenn $A = B \cup \{c\}$ für ein $c \notin B$ oder umgekehrt. Zum Beispiel ist $\{5, 42\}$ benachbart mit $\{0, 5, 42\}$, es ist aber *nicht* $\{4, 5\}$ benachbart mit $\{4, 6\}$ und es ist auch *keine* Menge mit sich selbst benachbart.

Zeigen Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes, dass es möglich ist, alle Teilmengen der natürlichen Zahlen in zwei disjunkte Gruppen $M \,\dot\cup\, N = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ aufzuteilen, sodass keine zwei benachbarten Mengen in der gleichen Gruppe sind.

Bemerkung: Um die Forderung aus der Aufgabe besser zu verstehen, können Sie sich zunächst überlegen, wie man die *endlichen* Teilmengen der natürlichen Zahlen aufteilen müsste, damit die Bedingung erfüllt ist.