Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

SS 2021

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Montag, den 17.05., um 12:00 Uhr, online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 4" zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $4 + 4$ Punkte

Nutzen Sie den *Sequenzenkalkül* der Aussagenlogik, um folgende Aufgaben zu lösen.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Formel φ_1 *unerfüllbar* ist, oder finden Sie ein Modell, falls die Formel erfüllbar ist.

$$\varphi_1 \coloneqq \neg(Y \land \neg Z) \land ((X \lor Y) \land (X \to Z))$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Formel φ_2 eine *Tautologie* ist, oder finden Sie eine falsifizierende Interpretation.

$$\varphi_2 \coloneqq (((A \lor B) \to C) \land (C \lor B)) \to (C \lor \neg\neg C)$$

Aufgabe 3 — $3 + 3$ Punkte

Eine Schlussregel heißt korrekt, wenn aus der Gültigkeit der Prämissen die Gültigkeit der Konklusion folgt. Begründen Sie semantisch, d.h. *nicht* mittels Ableitungen im Sequenzenkalkül, ob folgende Schlussregeln korrekt sind.

(a)
$$\frac{\Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta, \neg\varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}$$

(b)
$$\frac{\Gamma, \neg\psi, \neg\vartheta \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta \qquad \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta, \neg\varphi}$$

Aufgabe 4 — $3 + (1 + 2 + 2)$ Punkte

Der Junktor $\leftrightarrow$ ist definiert durch $[\![\varphi \leftrightarrow \psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ genau dann, wenn $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$.

(a) Geben Sie möglichst einfache und sinnvolle Schlussregeln ($\leftrightarrow\ \Rightarrow$) und ($\Rightarrow\ \leftrightarrow$) an, die die Einführung von $\leftrightarrow$ auf der linken bzw. rechten Seite der Konklusion erlauben.

(b) Betrachten Sie die Schlussregeln ($\lor\ \Rightarrow$) und ($\Rightarrow\ \lor$) aus der Vorlesung.

$$(\vee \Rightarrow)\colon\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow \vee)\colon\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta}$$

Wir versuchen, die beiden Schlussregeln zu „vereinheitlichen“, indem wir die neuen Schlussregeln $(\vee \Rightarrow)'$ und $(\Rightarrow \vee)'$ wie folgt definieren.

$$(\vee \Rightarrow)'\colon\ \frac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow \vee)'\colon\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta}$$

(i) Zeigen Sie, dass die neue Regel $(\vee \Rightarrow)'$ *nicht* korrekt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $(\Rightarrow \vee)'$ korrekt ist. Ist der Sequenzenkalkül immer noch korrekt, wenn wir die Benutzung der zusätzlichen Schlussregel $(\Rightarrow \vee)'$ erlauben? Bergünden Sie kurz Ihre Antwort.

(iii) Betrachten Sie die folgende Ableitung im Sequenzenkalkül mit $(\Rightarrow \vee)'$.

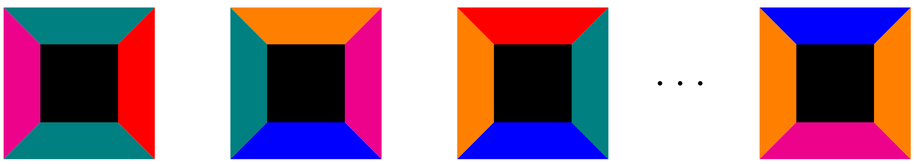
$$(\to \Rightarrow)\ \dfrac{(\Rightarrow \neg)\ \dfrac{(\Rightarrow \vee)'\ \dfrac{X \Rightarrow X \qquad \overbrace{X \Rightarrow Y}^{(1)}}{X \Rightarrow X \vee Y}}{\varnothing \Rightarrow X \vee Y, \neg X} \qquad \dfrac{\overbrace{Y \Rightarrow X}^{(2)} \qquad Y \Rightarrow Y}{Y \Rightarrow X \vee Y}\ (\Rightarrow \vee)'}{\neg X \to Y \Rightarrow X \vee Y}$$

Erklären Sie kurz, warum es plausibel ist, dass $\mathfrak{I}_1\colon X \mapsto 1, Y \mapsto 0$ und $\mathfrak{I}_2\colon X \mapsto 0, Y \mapsto 1$ trotz der Blätter (1) und (2) *keine* falsifizierenden Interpretationen für die Wurzelsequenz $\neg X \to Y \Rightarrow X \vee Y$ sind. Welche Eigenschaft müsste die neue Schlussregel $(\Rightarrow \vee)'$ haben, um aus der gegebenen Ableitung direkt schließen zu können, dass $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ falsifizierende Interpretationen wären?

Aufgabe 5 5 Punkte

Gegeben sei eine endliche Menge $\mathcal{F} := \{F_1, \ldots, F_m\}$ von Fliesen mit gefärbten Kanten, wie im folgenden Beispiel dargestellt.

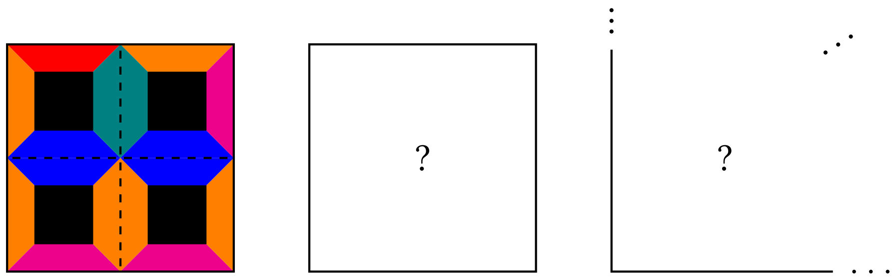
Beispiel:



Fliese 1 Fliese 2 Fliese 3 . . . Fliese m

Nun sollen in einem quadratischen Raum Fliesen gelegt werden. Dabei sollen die Fliesen aus $\mathcal{F}$ unter Beachtung der folgenden Bedingungen verwendet werden.

- Von zwei benachbarten Fliesen müssen stets die Farben an der jeweiligen Berührungskante übereinstimmen.
- Die Fliesen dürfen nicht rotiert werden.
- Es stehen beliebig viele Kopien von jeder Fliese F_i zur Verfügung. (Trotzdem gibt es immer nur $m \in \mathbb{N}$, also endlich viele, verschiedene Fliesen.)
- Der Raum hat die endliche Größe $n \times n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ *oder* er ist unendlich und hat die Größe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Im folgenden sind beispielhaft einige Räume dargestellt.



Größe 2×2 Größe $n \times n$ Größe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Eine Verlegung der Fliesen $\mathcal{F}$ in einem Raum gilt als korrekt, wenn die Bedingungen erfüllt sind und in jeder Zelle (i, j) des Raums eine Fliese liegt. Zum Beispiel ist die dargestellte Verlegung im Raum der Größe 2×2 korrekt und verwendet zwei Kopien von Fliese m aus dem Beispiel in der unteren Reihe und jeweils eine Kopie von Fliese 3 und 2 in der oberen Reihe.

Eine korrekte Verlegung der Fliesen $\mathcal{F}$ in einem unendlichen Raum R mit $R = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oder einem endlichen Raum $R = \{0, \dots, n-1\} \times \{0, \dots, n-1\}$ der Größe $n \times n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ kann formal als Funktion $f\colon R \to \mathcal{F}$ aufgefasst werden, die jeder Zelle im Raum R eine Fliese aus $\mathcal{F}$ zuweist, sodass horizontal und vertikal benachbarte Fliesen jeweils farblich zusammenpassen, d.h.

$$\begin{aligned} \mathsf{right}(f(i-1, j)) &= \mathsf{left}(f(i, j)) \quad \text{für alle } (i, j) \in R \text{ mit } i > 0 \quad \text{und} \\ \mathsf{top}(f(i, j-1)) &= \mathsf{bot}(f(i, j)) \quad \text{für alle } (i, j) \in R \text{ mit } j > 0. \end{aligned}$$

Mit left, right, bot und top sind jeweils die Kantenfarben der Fliesen gemeint. Im oberen Beispiel der Größe 2×2 haben wir also die Verlegung f mit $f(0, 0) = f(1, 0) = F_m$, $f(0, 1) = F_3$ und $f(1, 1) = F_2$.

Nutzen Sie das Lemma von König, um die folgende Aussage zu zeigen: Wenn es für eine endliche Menge $\mathcal{F} := \{F_1, \dots, F_m\}$ von gefärbten Fliesen möglich ist, für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine korrekte Verlegung im endlichen Raum der Größe $n \times n$ zu finden, dann gibt es auch eine korrekte Verlegung der Fliesen $\mathcal{F}$ im unendlichen Raum der Größe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Hinweis: Konstruieren Sie für das Lemma von König zunächst einen Baum, dessen Wurzel die leere Verlegung der Fliesen $\mathcal{F}$ im Raum der Größe 0×0 ist.