Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

SS 2021

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Montag, den **31.05. (*nicht* am 24.05.)**, um 12:00 Uhr, online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 5“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 $3 + 3 + 4^*$ Punkte

In den folgenden Teilaufgaben ist jeweils eine Struktur $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ gegeben und einige Teilmengen $B \subseteq A$ des Universums der jeweiligen Struktur. Beantworten Sie für jede dieser Teilmengen, ob es eine Substruktur von $\mathfrak{A}$ über dem Universum B gibt. Wenn *nicht*, dann geben Sie *mit Begründung* die kleinste Substruktur von $\mathfrak{A}$ an, die B enthält. Die Symbole $+$, $-$ und $\cdot$ sowie $\cup$ und $\cap$ haben die übliche Bedeutung in den jeweiligen Strukturen.

(a) Betrachten Sie die Struktur $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, +, -, \cdot)$ mit den Teilmengen

(i) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (die Menge der natürlichen Zahlen) und

(ii) $2\mathbb{Z} = \{2 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ (die Menge der geraden Zahlen).

(b) Betrachten Sie die Struktur $\mathfrak{Q} := (\mathbb{Q}, +, -, \cdot, {}^{-1})$, wobei ${}^{-1}$ das multiplikative Inverse

$$q^{-1} := \begin{cases} 0 & \text{falls } q = 0 \text{ und} \\ 1/q & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } q \in \mathbb{Q}$$

ist, mit den Teilmengen

(i) $\{1\}$ und

(ii) $\{0\}$.

(c)* Betrachten Sie die Struktur $\mathfrak{B} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, \overline{})$, wobei $\overline{}$ das Komplement

$$\overline{A} := \mathbb{N} \setminus A \qquad \text{für } A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

ist, mit den Teilmengen

(i) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ ist endlich}\}$ und

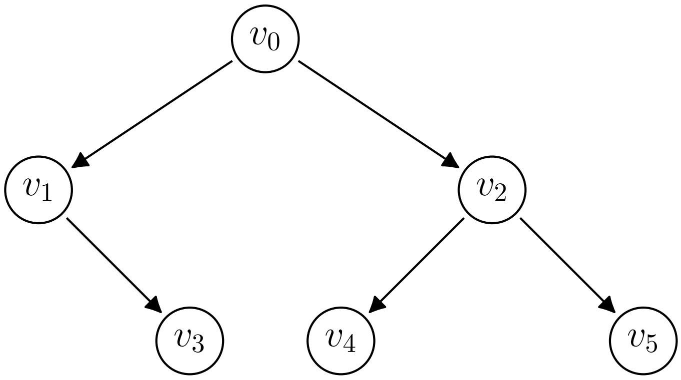
(ii) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ und } \overline{A} \text{ sind beide unendlich}\}$.

Erklärung der Aufgabenstellung: Sie sollen zum Beispiel in Aufgabenteil (b) (i) zuerst beantworten, ob es eine Substruktur von $\mathfrak{Q}$ über dem Universum $\{1\}$ gibt, und wenn nicht, dann sollen Sie mit Begründung die kleinste Substruktur von $\mathfrak{Q}$ angeben, die $\{1\}$ enthält.

Aufgabe 3 $5 + 3 + 2$ Punkte

Wir formalisieren Bäume über der Signatur $\tau := \{E, r\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol E für die Kanten und einem Konstantensymbol r für die Wurzel. Die Kanten sind dabei stets „von der Wurzel weg“ gerichtet. Im folgenden ist ein Beispielbaum $\mathcal{T} = (V, E^{\mathcal{T}}, r^{\mathcal{T}})$ dargestellt.

$\mathcal{T}$:



Im Beispielbaum $\mathcal{T}$ sind die Knoten $V := \{v_i \mid i \in \{0, \ldots, 5\}\}$ und die Wurzel $r^{\mathcal{T}} := v_0$. Die Pfeile stellen die gerichteten Kanten dar, also ist beispielsweise $(v_2, v_4) \in E^{\mathcal{T}}$, aber es gibt keine Rückkante, d.h. $(v_4, v_2) \notin E^{\mathcal{T}}$.

(a) Beschreiben Sie in Worten, was die folgenden FO($\{E, r\}$)-Sätze jeweils für Bäume (wie oben formalisiert) ausdrücken. Gelten sie im Beispielbaum $\mathcal{T}$, d.h., gilt $\mathcal{T} \models \psi_i$ für $i \in \{1, 2\}$?

(i) $\psi_1 := \forall x \forall y \forall z \neg(Erx \wedge Exy \wedge Eyz)$

(ii) $\psi_2 := \forall x \forall y_1 (Exy_1 \to \exists y_2 (Exy_2 \wedge y_1 \neq y_2 \wedge \forall z (Exz \to (z = y_1 \vee z = y_2))))$

Hinweis: Bitte drücken Sie die Aussagen der FO-Sätze jeweils möglichst geschickt in Worten aus, beispielsweise unter Verwendung von bekannten graphentheoretischen Begriffen. Vermeiden Sie insbesondere, die FO-Sätze „wörtlich“ zu übersetzen.

(b) Betrachten Sie den folgenden FO($\{E, r\}$)-Satz ϑ_n für $n > 0$. Beschreiben Sie in Worten, was ϑ_n in Abhängigkeit von n für Bäume ausdrückt. Für welche $n > 0$ gilt im Beispielbaum $\mathcal{T} \models \vartheta_n$?

$$\vartheta_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(Erx_1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} Ex_i x_{i+1} \right)$$

(c) Geben Sie eine Formel $\varphi(x) \in$ FO($\{E\}$) an, die genau die Wurzel von Bäumen beschreibt, ohne das Symbol r zu verwenden, d.h., für alle Bäume $\mathcal{T} = (V, E^{\mathcal{T}}, r^{\mathcal{T}})$ und Knoten $v \in V$ soll das Redukt $\mathcal{T}' = (V, E^{\mathcal{T}})$ genau dann $\varphi(v)$ erfüllen, wenn v die Wurzel ist, also wenn $r^{\mathcal{T}} = v$.

Aufgabe 4 $2 + 1 + 2 + 4 + 3$ Punkte

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{W} := (\{0, 1\}^*, \circ, \simeq)$ der endlichen Wörter über dem binären Alphabet $\Sigma := \{0, 1\}$. Dabei ist $\circ$ die Konkatenation $a \circ b := ab$ zweier Wörter $a, b \in \{0, 1\}^*$ und $\simeq$ die Relation, die besagt, dass zwei Wörter die gleiche Länge haben, d.h. es gilt $a \simeq b$ genau dann, wenn $|a| = |b|$, wobei mit $|\bullet|$ jeweils die Länge eines Wortes bezeichnet wird.

Geben Sie FO($\{\circ, \simeq\}$)-Formeln an, die die folgenden Sachverhalte für Wörter in der Struktur $\mathfrak{W}$ beschreiben. Achten Sie dabei besonders auf die freien Variablen in Ihren Formeln und erklären Sie jeweils kurz die Idee jeder Formel.

(a) $a = \varepsilon$, d.h., a ist das leere Wort.

(i) Drücken Sie $a = \varepsilon$ aus, ohne $\simeq$ zu benutzen, d.h. mit einer $\mathrm{FO}(\{\circ\})$-Formel.

(ii) Drücken Sie $a = \varepsilon$ aus, ohne $\circ$ zu benutzen, d.h. mit einer $\mathrm{FO}(\{\simeq\})$-Formel.

(b) a ist ein Präfix von b.

(c) a hat ungerade Länge.

(d) a hat höchstens Länge n für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

(e) $|a| \mod 7 = 5$.

Hinweis: Sie dürfen Hilfsformeln definieren und Formeln aus den *vorherigen* Teilaufgaben verwenden, auch wenn Sie die entsprechende Teilaufgabe nicht bearbeitet haben.

Aufgabe 5* 6* Punkte

Wir nennen eine Satzmenge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ *robust*, wenn jede τ-Struktur maximal einen Satz aus Ψ verletzt, das heißt, für alle τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \not\models \Psi$ gilt $\mathfrak{A} \not\models \psi$ nur für genau ein $\psi \in \Psi$.

Zeigen Sie, dass es für jede unendliche Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mit einer abzählbaren Signatur τ eine robuste Satzmenge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mit $\mathsf{Mod}(\Phi) = \mathsf{Mod}(\Psi)$ gibt, d.h., die robuste Satzmenge Ψ besitzt genau die gleiche Modellklasse wie Φ.