Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

SS 2021

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Montag, den 07.06., um 12:00 Uhr, online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 6“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $2 + 2$ Punkte

Sei $\tau := \{c, f, P, Q, R, <\}$, wobei c ein Konstantensymbol ist, f ein einstelliges Funktionssymbol, P und Q einstellige Relationssymbole sowie R und $<$ zweistellige Relationssymbole.

Hinweis: Orientieren Sie sich bei der Lösung der folgenden Aufgaben an den Verfahren, die in der Vorlesung vorgestellt wurden. Achten Sie dabei darauf, genug Umformungsschritte anzugeben, damit Ihr Lösungsweg nachvollziehbar ist.

(a) Formen Sie die Formel

$$\vartheta_1 := \quad Qy \lor \neg\forall x(Px \to \exists z\neg(Rfzz \land c < z)) \quad \in \mathrm{FO}(\tau)$$

in *Negationsnormalform* um.

(b) Formen Sie die Formel

$$\vartheta_2 := \quad (\neg\exists x Pffx \lor \forall x(Qx \land Rxy)) \land x < y \land Rcz \quad \in \mathrm{FO}(\tau)$$

in *Pränex-Normalform* um.

Aufgabe 3 — $1 + 2 + 1 + 2$ Punkte

Betrachten Sie die Struktur $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ und den Satz $\psi = \forall x\exists y(x + y = 0)$.

(a) Geben Sie eine *unendliche* Substruktur von $\mathfrak{A}$ an, die den Satz ψ *nicht* erfüllt.

(b) Formen Sie ψ zu einem Satz φ in Skolem-Normalform um. Ist φ logisch äquivalent zu ψ?

(c) Geben Sie eine Expansion $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ an, die φ erfüllt.

(d) Gibt es eine Substruktur von $\mathfrak{B}$, die ψ nicht erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 11 + 2 + 2 Punkte

Seien c, d, e und s Konstantensymbole, f ein einstelliges Funktionssymbol, $\circ$ ein zweistelliges Funktionssymbol, O ein einstelliges Relationssymbol sowie E und $<$ zweistellige Relationssymbole.

(a) Geben Sie ein, *wenn möglich endliches*, Axiomensystem für die folgenden Klassen von Strukturen an. Erklären Sie dabei jeweils kurz die Idee Ihres Axiomensystems. Falls Sie ein unendliches Axiomensystem angeben, müssen Sie *nicht* beweisen oder begründen, warum kein endliches Axiomensystem existiert.

(i) $\mathcal{K}_i := \{(G, \circ, e) \mid (G, \circ, e)$ ist eine endliche abelsche Gruppe mit $5 < |G| < 10\}$

Hinweis: Eine *abelsche* Gruppe ist eine kommutative Gruppe.

(ii) $\mathcal{K}_{ii} :=$

$$\{(A, <) \mid < \text{ ist eine partielle Ordnung und alle nicht-leeren } \textit{endlichen} \text{ Teilmengen } B \text{ mit } \varnothing \subsetneq B \subseteq A \text{ besitzen ein Supremum bzgl. } < \text{ in } A\}$$

Hinweis: Das *Supremum* einer Teilmenge $B \subseteq A$ ist die kleinste obere Schranke von B bzgl. der Ordnung $<$ in A. Dabei ist eine *obere Schranke* von B ein Element, das größer oder gleich allen Elementen in B ist.

(iii) $\mathcal{K}_{iii} := \{(U, f, O, s) \mid f$ ist injektiv, $f(U) = O$ und $s \notin O\}$

Hinweis: Das *Bild* $f(U)$ von U unter f ist definiert als die Menge $f(U) := \{f(u) \mid u \in U\}$.

(iv) $\mathcal{K}_{iv} :=$

$$\{(V, E, c, d) \mid G = (V, E) \text{ ist ein } \textit{ungerichteter} \text{ Graph und der Knoten } d \text{ ist von } c \text{ aus in } G \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\}$$

(b) Betrachten Sie die Klasse $\mathcal{K}_{iii}$ aus Aufgabenteil (a) (iii) und geben Sie ein Element der Klasse $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_{iii}$, also ein Modell Ihres Axiomensystems Φ_{iii}, an. Gibt es auch ein endliches Modell? Begründen Sie kurz Ihre Antwort. (Ein formaler Beweis ist nicht erforderlich.)

(c) Betrachten Sie Ihr Axiomensystem Φ_{iv} aus Aufgabenteil (a) (iv). Wir wollen nun versuchen, daraus ein Axiomensystem für die Klasse der ungerichteten, unzusammenhängenden Graphen

$$\mathcal{K} := \{(V, E) \mid G = (V, E) \text{ ist ein ungerichteter Graph, der } \textit{nicht} \text{ zusammenhängend ist}\}$$

zu konstruieren. Dabei ist die grobe Idee, die Konstanten c und d aus dem Axiomensystem Φ_{iv} zu eliminieren und stattdessen auszudrücken, dass zwei beliebige Elemente x und y existieren, die nicht verbunden sind. Dazu ersetzen wir in den Formeln jeweils c und d durch neue Variablen x und y, die an *geeigneten* Stellen mit Existenzquantoren $\exists x$ und $\exists y$ quantifiziert werden.

Kann man auf diese Weise das gewünschte Axiomensystem für $\mathcal{K}$ erhalten? Geben Sie entweder das erzeugte Axiomensystem für $\mathcal{K}$ an oder begründen Sie kurz, warum es nicht möglich ist, mit dieser Idee ein Axiomensystem für $\mathcal{K}$ zu bilden. (Ein formaler Beweis ist nicht erforderlich.)

Aufgabe 5 7 Punkte

Sei τ eine beliebige Signatur, $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ Formeln der Prädikatenlogik und $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Formelmenge. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Wenn $\varphi \not\equiv \psi$ und Φ erfüllbar ist, dann folgt $\Phi \not\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

(b) Wenn $\varphi \equiv \psi$ und $x \notin \mathsf{frei}(\varphi)$, dann auch $\exists x\varphi \equiv \forall x\psi$.

(c) Wenn $\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi$, dann auch $\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi$.