Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

SS 2021

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Montag, den 14.06., um 12:00 Uhr, online im Moodle-Lernraum.

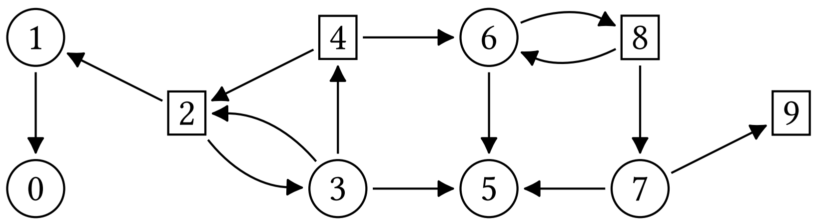
Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 7“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $3 + 1 + 2$ Punkte

Wir betrachten den folgenden Spielgraphen $\mathcal{G} = (V = V_0 \dot\cup V_1, E)$. Dabei sind die umkreisten Knoten ◯ in V_0 (dort ist Spieler 0 am Zug) und die anderen Knoten □ in V_1 (dort ist Spieler 1 am Zug).



(a) Bestimmen Sie die Gewinnregionen W_0 und W_1 von Spieler 0 und 1 in $\mathcal{G}$. Kennzeichnen Sie dabei für jede Position $v \in W_\sigma$, wieviele Schritte Spieler σ benötigt, um von v aus zu gewinnen, wenn beide Spieler optimal Spielen (und der Verlierer möglichst viele Züge überleben möchte).

(b) Ist $\mathcal{G}$ fundiert? Ist $\mathcal{G}$ determiniert?

(c) Die beiden Spieler möchten das Spiel nun spielen, dafür müssen sie sich zuerst auf eine Startposition $v_s \in V$ einigen. Spieler 0 möchte die Startposition wählen. Im Gegenzug darf Spieler 1 vorher einen beliebigen Knoten aus $\mathcal{G}$ entfernen. Wer gewinnt in dieser Situation, wenn beide optimal spielen und die optimale Wahl am Anfang des Spiels treffen? Welche Wahl (des zu entfernenden Knotens bzw. der Startposition) muss der Gewinner dafür treffen?

Aufgabe 3 — $2 + 5$ Punkte

Wir definieren *abgeschnittene* Spiele $\mathcal{G} = (V = V_0 \dot\cup V_1, E)$ wie in der Vorlesung mit der zusätzlichen Bedingung, dass V endlich ist und der Regel, dass Partien sofort in einem *Remis* (unentschieden) enden, falls eine Spielposition erreicht ist, die vorher schon erreicht wurde (d.h. wenn sich eine Position wiederholt).

(a) Betrachten Sie wieder den Spielgraphen $\mathcal{G}$ aus Aufgabe 2 mit der Startposition $v_s := 2$ bzw. $v_s := 6$. Geben Sie für beide Startpositionen jeweils an, welche Partie die beiden Spieler von dieser Position aus spielen würden, wenn die zusätzliche Remis-Regel verwendet wird und wenn beide optimal spielen. Geben Sie jeweils auch an, wie die Partie ausgeht.

(b) Beweisen Sie, dass in jedem abgeschnittenen Spiel $\mathcal{G} = (V = V_0 \dot\cup V_1, E)$ für jeden Startknoten $v_s \in V$ *entweder* einer der beiden Spieler $\sigma \in \{0,1\}$ eine Gewinnstrategie von v_s aus hat *oder* beide Spieler eine Strategie haben, mit der sie von v_s aus mindestens ein Remis erzwingen können.

Hinweis: Konstruieren Sie zuerst aus dem abgeschnittenen Spiel $\mathcal{G}$ auf geeignete Weise ein oder mehrere „gewöhnliche" (nicht-abgeschnittene) Spiele. Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass fundierte Spiele determiniert sind.

Aufgabe 4 4 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (A = \{1,2,3\}, P, Q, \sim)$ mit den einstelligen Relationen $P^{\mathfrak{A}} := \{2\}$ und $Q^{\mathfrak{A}} := \{1,2\}$ sowie der zweistelligen Relation $\sim^{\mathfrak{A}} := \{1,3\} \times \{1,3\}$. Betrachten Sie den Satz

$$\psi := \exists x(x \sim x) \land \forall y(\neg Py \to Qy) \quad \in \mathrm{FO}(\{P, Q, \sim\}).$$

Geben Sie das Auswertungsspiel $\mathsf{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ an und beantworten Sie, ob $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt oder nicht, indem Sie eine Gewinnstrategie für einen der Spieler im Auswertungsspiel $\mathsf{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ angeben.

Aufgabe 5 $4 + 4$ Punkte

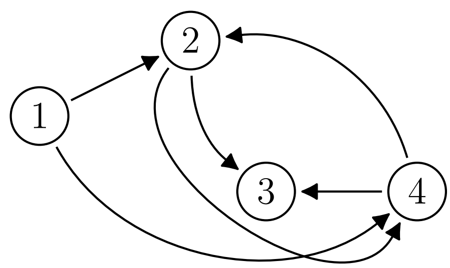
Für eine Struktur $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ bezeichnet $\mathsf{Aut}(\mathfrak{A})$ die Menge aller Automorphismen auf $\mathfrak{A}$. Wir nennen $\mathfrak{A}$ *starr*, wenn $\mathsf{Aut}(\mathfrak{A}) = \{\mathsf{id}_A\}$, d.h., wenn es auf $\mathfrak{A}$ nur den trivialen Automorphismus id_A gibt.

(a) Zeigen Sie jeweils, dass die folgenden Strukturen starr sind oder geben Sie einen Automorphismus an, der die Starrheit widerlegt.

Hinweis: Wenn in einer Struktur $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ alle Elemente $a \in A$ elementar definierbar sind, dann ist $\mathfrak{A}$ starr. Diese Aussage wurde im Tutorium bewiesen und darf hier bei Bedarf ohne Beweis verwendet werden.

(i) $(\mathbb{N}, \mathbb{P}, \cdot)$, wobei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen ist

(ii) der folgende Graph $\mathcal{G} = (V, E)$:



(iii) $(\mathbb{Z}, 0, <)$

(b) Sei Σ ein endliches Alphabet und $\mathfrak{A} := (\Sigma^*, \circ)$, wobei Σ^* die Menge aller endlichen Wörter über Σ ist und $\circ$ die Konkatenation zweier Wörter ist.

Geben Sie alle Automorphismen $\mathsf{Aut}(\mathfrak{A})$ auf $\mathfrak{A}$ an und zeigen Sie insbesondere, dass es außer den von Ihnen angegebenen Automorphismen keine weiteren gibt.

Aufgabe 6 8 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass das angegebene Element bzw. die angegebene Funktion oder Relation in der gegebenen Struktur elementar definierbar ist.

Wenn Sie eine Formel angeben, erklären Sie jeweils kurz die Idee der Formel.

(a) die Menge $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ in $(\mathbb{Q}, 0, +, <)$

(b) die Funktion $\mathsf{next}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jede natürliche Zahl n auf die nächste Primzahl $p \geq n$ abbildet in $(\mathbb{N}, 0, 1, \cdot, <)$.

(c) die Menge $11\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, 7\mathbb{Z}, <)$

(d) die Exponentialfunktion $\exp$ in $\mathcal{F} = (C^\infty(\mathbb{R}), 0, 1, D, \circ)$

Dabei ist $C^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller *glatten* (d.h. unendlich oft differenzierbaren) reellen Funktionen (d.h. Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$), 0 ist die Nullfunktion, 1 ist die konstante Funktion $1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 1$, D die Ableitung und $\circ$ die Verkettung.

Genauer gesagt ist $D\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ eine einstellige Funktion auf $\mathcal{F}$, die die Elemente von $C^\infty(\mathbb{R})$ (das sind wiederum differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) jeweils auf ihre erste Ableitung abbildet. Die Verkettung $g \circ f$ zweier Funktionen $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist deren Hintereinanderausführung, das heißt,

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\exp(x) := e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Exponentialfunktion $\exp$ zwar eine Funktion auf den reellen Zahlen ist, aber *keine* Funktion auf der Struktur $\mathcal{F}$, in $\mathcal{F}$ ist $\exp$ „nur“ ein Element, genau wie die konstanten Funktionen 0 und 1. Die Elemente des Universums $C^\infty(\mathbb{R})$ von $\mathcal{F}$ sind also Funktionen auf den reellen Zahlen.