Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

SS 2021

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Montag, den 21.06., um 12:00 Uhr, online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 8“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — 7 Punkte

Eine *vollständige Erweiterung* $T' \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ einer Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ist eine vollständige Theorie, die T enthält, das heißt, T' ist vollständig und $T \subseteq T'$. Ein *Axiomensystem* einer Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ist eine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mit $\mathsf{Mod}(\Phi) = \mathsf{Mod}(T)$.

Sind die folgenden Theorien vollständig? Beweisen Sie jeweils, dass die Theorie vollständig ist, oder widerlegen Sie die Vollständigkeit der Theorie, indem Sie zwei verschiedene vollständige Erweiterungen angeben.

Bemerkung: Da die vollständigen Erweiterungen immer unendlich sind, können Sie sie nicht explizit aufschreiben. Nutzen Sie daher eine geeignete Schreibweise. Insbesondere genügt es, wenn Sie für die vollständigen Erweiterungen jeweils (endliche) Axiomensysteme angeben.

(a) die Theorie der zu $(\mathbb{N}, \cdot, <)$ elementar äquivalenten Strukturen

(b) die Theorie von $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$

(c) die Theorie der Cliquen $G = (V, E)$ mit

  (i) endlich vielen Elementen

  (ii) unendlich vielen Elementen

  Hinweis: Eine *Clique* ist ein ungerichteter Graph, in dem alle Knotenpaare jeweils durch eine Kante direkt miteinander verbunden sind.

(d) die Theorie der zu $(\mathbb{Z}, <)$ isomorphen Strukturen

Aufgabe 3 — $1 + 5 + 3$ Punkte

Betrachten Sie die Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\{<\})$ der dichten linearen Ordnungen mit unendlich vielen Elementen. Die Formelmenge

$$\begin{aligned}\Phi := \{&\forall x(\neg x < x),\\ &\forall x\forall y\forall z((x < y \land y < z) \to x < z),\\ &\forall x\forall y(x < y \lor x = y \lor y < x),\\ &\forall x\forall y(x < y \to \exists z(x < z \land z < y)),\\ &\exists x\exists y(x \neq y)\} \quad \subseteq \mathrm{FO}(\{<\})\end{aligned}$$

ist ein endliches Axiomensystem von T, denn aus der Dichtheit und der Existenz mindestens zweier Elemente folgt sofort, dass es unendlich viele Elemente geben muss.

Eine lineare Ordnung *mit Endpunkten* ist eine lineare Ordnung, die sowohl ein Minimum als auch ein Maximum besitzt.

(a) Geben Sie zwei dichte lineare Ordnungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *mit* Endpunkten und unendlich vielen Elementen an, die *nicht* isomorph zueinander sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Theorie T_E der dichten linearen Ordnungen *mit* Endpunkten und unendlich vielen Elementen vollständig ist.

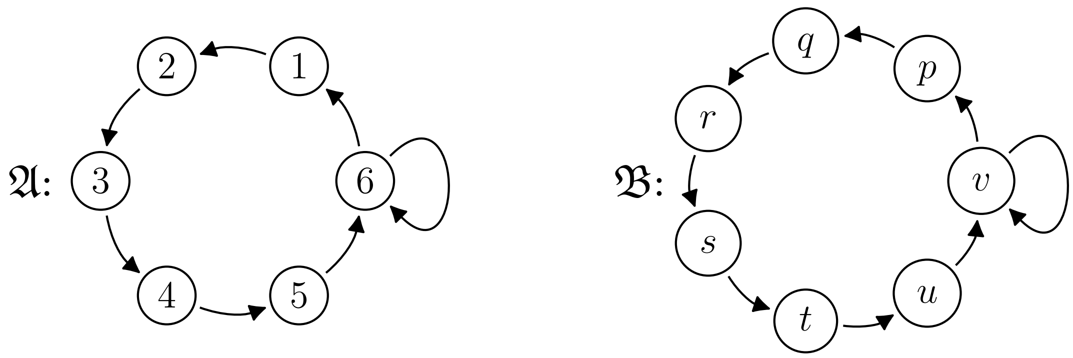
(c) Geben Sie für jede vollständige Erweiterung der Theorie der dichten linearen Ordnungen mit unendlich vielen Elementen T jeweils ein *endliches* Axiomensystem an. Wieviele verschiedene vollständige Erweiterungen von T gibt es?

Hinweis: Nutzen Sie Φ aus der Aufgabenstellung aus. Sie brauchen *nicht* zu beweisen, dass Ihre Axiomensysteme korrekt sind, also dass sie tatsächlich jeweils eine vollständige Erweiterung von T axiomatisieren.

Aufgabe 4 10 Punkte

Geben Sie für die folgenden Paare von Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jeweils das *kleinste* $m \in \mathbb{N}$ an, sodass $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ und beschreiben Sie eine Gewinnstrategie des Herausforderers im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ sowie eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin im Spiel $\mathcal{G}_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(a) die gerichteten Graphen $\mathfrak{A} := (A, E^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} := (B, E^{\mathfrak{B}})$ mit



(b) $\mathfrak{A} := (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ und $\mathfrak{B} := (\mathcal{P}(\{0, 1\}), \subseteq)$

Dabei ist $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ die Potenzmenge von $\mathbb{Z}$ und $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ die Potenzmenge von $\{0, 1\}$. Die Relation $\subseteq$ ist in beiden Strukturen jeweils die übliche Teilmengenbeziehung.

(c) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, M)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{Z}, M)$, wobei M jeweils der Graph der Multiplikation ist

Geben Sie *nur* hier in Aufgabenteil (c) *anstatt* einer Gewinnstrategie des Herausforderers in $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ einen trennenden Satz ψ für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit Quantorenrang m an. Vergessen Sie nicht, dass Sie trotzdem die Gewinnstrategie der Duplikatorin in $\mathcal{G}_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ angeben müssen.

Aufgabe 5 4 Punkte

Zeigen Sie, dass die Klasse $\mathcal{K}$ der ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, deren Knoten alle einen endlichen Grad haben, *nicht* FO-axiomatisierbar ist. Dabei ist der *Grad* $\deg(v)$ eines Knotens $v \in V$ die Anzahl seiner direkten Nachbarn, das heißt

$$\deg(v) = |\{w \in V \mid v \text{ hat eine Kante zu } w\}| \quad \text{für } v \in V.$$

Nutzen Sie für Ihren Beweis die Aussage aus Aufgabe 3 im Tutorium.