Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

SS 2021

10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Montag, den 05.07., um 12:00 Uhr, online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 10" zu absolvieren.

Aufgabe 2 — 10 Punkte

Sei $\tau := \{c_0, c_1, f, R\}$, wobei c_0 und c_1 Konstantensymbole sind, f ein einstelliges Funktionssymbol sowie R ein einstelliges Relationssymbol. Wir betrachten die folgende Menge T von atomaren Sätzen:

$$T := \{fc_0 = fc_1, f^4c_0 = c_1, Rc_0, Rf^2c_0\}$$

Die folgende Abbildung stellt die Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(T)$ mit den Elementen $\{c_0, fc_0, \dots, c_1, fc_1, \dots\}$ und der Funktion $f^{\mathfrak{H}(T)}$ grafisch dar. Die Relation $R^{\mathfrak{H}(T)}$ *fehlt* in der Abbildung.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
c_0 & \xmapsto{f} & fc_0 & \xmapsto{f} & f^2c_0 & \xmapsto{f} & f^3c_0 & \xmapsto{f} & f^4c_0 & \xmapsto{f} & \cdots \\
c_1 & \xmapsto{f} & fc_1 & \xmapsto{f} & f^2c_1 & \xmapsto{f} & f^3c_1 & \xmapsto{f} & f^4c_1 & \xmapsto{f} & \cdots
\end{array}$$

(a) Geben Sie an, welche Elemente in $R^{\mathfrak{H}(T)}$ sind.

(b) Gilt $\mathfrak{H}(T) \models T$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Geben Sie die kleinste Menge Σ an, die unter Substitution abgeschlossen ist und T enthält. Begründen Sie dabei insbesondere, warum die von Ihnen angegebene Menge minimal ist. Sie müssen den Abschluss unter Substitution *nicht* formal beweisen.

(d) Gilt $\mathfrak{H}(T) \cong \mathfrak{H}(\Sigma)$? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

(e) Sei $\sim$ die durch Σ induzierte Kongruenzrelation auf der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$. Geben Sie das kanonische Modell $\mathfrak{A}(\Sigma) := (\mathfrak{H}(\Sigma)/{\sim})$ von Σ *explizit* an.

Hinweis: Das kanonische Modell $\mathfrak{A}(\Sigma)$ ist endlich. Sie können es wie oben grafisch darstellen (R nicht vergessen!) oder Elemente, Funktionen und Relationen explizit aufzählen.

Aufgabe 3 — 8 Punkte

Sei $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ eine beliebige τ-Struktur. Analog zur Theorie $\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) := \{\psi \in \mathrm{FO}(\tau) \mid \mathfrak{A} \models \psi\}$ definieren wir das Komplement

$$\overline{\mathsf{Th}}(\mathfrak{A}) := \{\psi \in \mathrm{FO}(\tau) \mid \mathfrak{A} \not\models \psi\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ und $\overline{\mathsf{Th}}(\mathfrak{A})$ die Eigenschaften (1) bis (4) von Hintikka-Mengen (unter Lemma 4.16 im Skript) erfüllen.

(b) Geben Sie eine sinnvolle Variante der Eigenschaft (4) für den Junktor $\wedge$ (die Konjunktion) an. Die Mengen $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ und $\overline{\mathsf{Th}}(\mathfrak{A})$ sollten auch diese Eigenschaft erfüllen, das brauchen Sie aber *nicht* zu beweisen.

(c) Geben Sie analog dazu eine sinnvolle Eigenschaft für den Junktor $\rightarrow$ (Implikation) an und zeigen Sie, dass die Mengen $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ und $\overline{\mathsf{Th}}(\mathfrak{A})$ diese Eigenschaft erfüllen.

(d) Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{R}, (c_q)_{q\in\mathbb{Q}}, +, \cdot, <)$, wobei $+$, $\cdot$ und $<$ wie üblich interpretiert sind und alle c_q für $q \in \mathbb{Q}$ Konstantensymbole für die jeweilige rationale Zahl mit der Interpretation $c_q^{\mathfrak{A}} := q$ sind.

Zeigen Sie, dass $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ und $\overline{\mathsf{Th}}(\mathfrak{A})$ *nicht* die Eigenschaft (5) von Hintikka-Mengen erfüllen.

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei $\mathcal{K}$ eine beliebige Klasse von τ-Strukturen, die *endlich* axiomatisierbar ist und $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ein beliebiges (möglicherweise *unendliches*) Axiomensystem für $\mathcal{K}$, das bedeutet, es gilt $\mathcal{K} = \mathsf{Mod}(\Phi)$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $\mathcal{K}'$ eine Klasse von τ-Strukturen mit $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$. Dann ist $\mathcal{K}'$ FO-axiomatisierbar.

(b) Sei $\mathcal{K}'$ eine Klasse von τ-Strukturen mit $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$. Dann ist $\mathcal{K}'$ endlich axiomatisierbar.

(c) Es gibt einen Satz $\psi \in \Phi$, der bereits $\mathcal{K}$ axiomatisiert, das heißt, $\mathcal{K} = \mathsf{Mod}(\psi)$ für ein $\psi \in \Phi$.

(d) Wir können einen Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ als Konjunktion von Sätzen in Φ bilden, der $\mathcal{K}$ axiomatisiert, das heißt, $\mathcal{K} = \mathsf{Mod}(\psi)$ für ein $\psi := \bigwedge \Psi \in \mathrm{FO}(\tau)$, wobei $\Psi \subseteq \Phi$ eine Teilmenge von Φ ist.

(e) Das Komplement $\overline{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{K}$ ist endlich axiomatisierbar.

Dabei ist das Komplement $\overline{\mathcal{K}}$ definiert als die Klasse aller τ-Strukturen, die *nicht* in $\mathcal{K}$ sind.