11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Montag, den 12.07., um 12:00 Uhr, online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 11“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 5 Punkte

Zeigen Sie, dass die Klasse der ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$, die *keine* unendliche Clique enthalten, nicht FO-axiomatisierbar ist. Nutzen Sie für Ihren Beweis den Kompaktheitssatz (und insbesondere *nicht* die Ehrenfeucht-Fraïssé-Methode).

Hinweis: Eine Clique in einem ungerichteten Graphen $\mathcal{G}$ ist eine Menge von Knoten, die paarweise direkt miteinander durch Kanten verbunden sind.

Aufgabe 3 19 Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an und erklären Sie kurz die Idee Ihres Axiomensystems. Falls die Klasse nicht (endlich) axiomatisierbar ist, beweisen Sie dies mit einer Methode Ihrer Wahl.

(a) die Klasse der ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, in denen es für jedes $n \in \mathbb{N}$ *höchstens* eine Zusammenhangskomponente mit *genau* n Knoten gibt

Dabei ist E ein zweistelliges Relationssymbol.

Hinweis: Auf Übungsblatt 9 wurde in Aufgabe 2 gezeigt, dass diese Klasse *nicht endlich axiomatisierbar* ist. Das müssen Sie hier nicht erneut beweisen.

(b) $\{(U, +) \mid (U, +) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

Dabei ist $+$ ein zweistelliges Funktionssymbol und $\cong$ bedeutet „ist isomorph zu“.

(c) die Klasse der endlichen dichten linearen Ordnungen $(U, <)$

Dabei ist $<$ ein zweistelliges Relationssymbol.

(d) $\{(U, f, o) \mid f(U) \text{ ist unendlich}\}$

Dabei ist f ein einstelliges Funktionssymbol, o ist ein Konstantensymbol und in der Struktur bezeichnen wir mit $f(U) := \{f(u) \mid u \in U\}$ das Bild des Universums U unter f.

(e) $\{(U, f, o) \mid f(U) \text{ ist endlich}\}$

Dabei sind f, o und $f(U)$ wie oben in (d) definiert.

(f) $\{\mathfrak{A} \in \mathsf{Str}(\tau) \mid$ die Klasse der zu $\mathfrak{A}$ elementar äquivalenten Strukturen ist FO-axiomatisierbar$\}$

Dabei bezeichnet $\mathsf{Str}(\tau)$ die Klasse aller τ-Strukturen und τ ist eine beliebige Signatur.

Hinweis: Sie dürfen die Signatur nicht selbst festlegen.

(g) $\{(A, (R_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mid$ für alle $S \subseteq \mathbb{N}$ gibt es ein $a_S \in A,$ sodass gilt: $a_S \in R_n^{\mathfrak{A}}$ gdw. $n \in S\}$

Dabei sind alle R_n für $n \in \mathbb{N}$ jeweils einstellige Relationssymbole.

Aufgabe 4 6 Punkte

Sei $\mathcal{K}$ die Klasse der Cliquen $\mathcal{G} = (V, E)$. Wir betrachten folgendes Problem: Gegeben ein FO($\{E\}$)-Satz φ, gibt es eine Clique $\mathcal{G}$, die φ erfüllt?

Zeigen Sie, dass das Problem entscheidbar ist, indem Sie einen Algorithmus beschreiben, der das Problem entscheidet. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus und argumentieren Sie dabei insbesondere, warum Ihr Algorithmus terminiert.

Hinweis: Cliquen sind ungerichtete Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$, in denen jedes Paar von Knoten $v, w \in V$ mit $v \neq w$ durch eine Kante direkt verbunden ist. Die Klasse der Cliquen $\mathcal{K}$ wird axiomatisiert durch den Satz

$$\psi := \forall x(\neg Exx) \land \forall x\forall y(Exy \to Eyx) \land \forall x\forall y(x \neq y \to Exy) \quad \in \mathrm{FO}(\{E\}).$$

Aufgabe 5* 8* Punkte

Für eine Signatur τ bezeichnen wir mit $\mathsf{Str}(\tau)$ die Klasse *aller* τ-Strukturen. Eine Klasse $\mathcal{K}$ von τ-Strukturen ist *unter Isomorphie abgeschlossen*, wenn für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ aus $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ folgt.

Wir nennen eine Klasse $\mathcal{K}$ von τ-Strukturen *nicht-trivial*, wenn $\varnothing \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq \mathsf{Str}(\tau)$ und $\mathcal{K}$ unter Isomorphie abgeschlossen ist.

Die *Theorie* einer nicht-leeren Klasse $\mathcal{K} \neq \varnothing$ von τ-Strukturen ist definiert als

$$\mathsf{Th}(\mathcal{K}) := \bigcap_{\mathfrak{A}\in\mathcal{K}} \mathsf{Th}(\mathfrak{A}) = \{\psi \in \mathrm{FO}(\tau) \mid \mathfrak{A} \models \psi \text{ für alle } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\} \subseteq \mathrm{FO}(\tau).$$

(a) Sei $\mathcal{K} \neq \varnothing$ eine beliebige, nicht-leere Klasse von τ-Strukturen. Zeigen Sie, dass $\mathsf{Th}(\mathcal{K})$ genau die *kleinste* FO-axiomatisierbare Klasse $\mathcal{K}^* := \mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(\mathcal{K}))$ axiomatisiert, in der $\mathcal{K}$ enthalten ist, also

  (i) $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}^*$ und

  (ii) für alle FO-axiomatisierbaren Klassen $\mathcal{K}'$ von τ-Strukturen mit $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$ gilt, dass $\mathcal{K}^* \subseteq \mathcal{K}'$.

(b) Geben Sie für jede beliebige Signatur τ eine nicht-triviale Klasse $\mathcal{K}$ von τ-Strukturen an, sodass $\mathsf{Th}(\mathcal{K})$ genau die triviale Klasse $\mathsf{Str}(\tau)$ axiomatisiert, also $\mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(\mathcal{K})) = \mathsf{Str}(\tau)$. Beweisen Sie, dass Ihre angegebene Klasse die gewünschten Eigenschaften erfüllt.