

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen funktional vollständig sind.

(a) $\{\text{sel}, 0, 1\}$, wobei sel definiert ist als

$$\text{sel}: B^3 \rightarrow B, \quad \text{sel}(x, y, z) := \begin{cases} y & \text{falls } x = 0 \quad \text{und} \\ z & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

(b) $\{\vee, \wedge, 0, 1\}$

Hinweis: Zeigen Sie, dass alle durch $\{\vee, \wedge, 0, 1\}$ darstellbaren Funktionen monoton sind. Eine Boolesche Funktion $f: B^n \rightarrow B$ ist *monoton*, wenn für alle $\bar{x}, \bar{y} \in B^n$ aus $\bar{x} \leq \bar{y}$ auch $f(\bar{x}) \leq f(\bar{y})$ folgt. Dabei bedeutet $\bar{x} \leq \bar{y}$ für Tupel $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ aus B^n , dass $x_i \leq y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Aufgabe 2

Wir betrachten sechs Unternehmen „Abelian Group“, „Food Corporation“, „Incompetent Consulting“, „Obsolete Systems“, „Reliable Services“ und „Useless Industries“ mit den folgenden Abhängigkeitsverhältnissen.

- (i) Die „Food Corporation“ benötigt „Reliable Services“.
- (ii) Sowohl die „Abelian Group“ als auch „Obsolete Systems“ verlässt sich auf „Incompetent Consulting“.
- (iii) Die Firma „Reliable Services“ muss schließen, wenn sowohl die „Food Corporation“ als auch die „Abelian Group“ ausfällt.
- (iv) Wenn „Obsolete Systems“ und „Incompetent Consulting“ schließen, dann auch „Useless Industries“.

Aus unerklärlichen Gründen ist die Firma „Incompetent Consulting“ bankrott. Die Regierung greift nicht ein, da sie behauptet, dass die Firma „Food Corporation“ *nicht* schließen muss.

Formalisieren Sie die Situation mit einer geeigneten Horn-Formel und bestimmen Sie mithilfe des Markierungsalgorithmus, ob die Regierung mit ihrer Behauptung Recht haben kann und welche Firmen *mindestens* den Betrieb einstellen müssen. Erklären Sie vorher, wie Sie die möglichen Ergebnisse des Markierungsalgorithmus interpretieren würden.