Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie mittels Resolution folgende Behauptungen.

(a) Die Klauselmenge $K := \{\{X, Y\}, \{\neg X, \neg Y\}\}$ ist erfüllbar.

(b) Die folgende Formel ist eine Tautologie.

$$\varphi := (\neg Q \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee ((\neg R \vee P) \to \neg S) \vee (P \wedge S)$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit dem Kompaktheitssatz, dass man $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, also die Teilmengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, in „große" und „kleine" Mengen aufteilen kann, sodass

(i) jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ entweder groß oder klein ist, aber nicht beides,

(ii) jede Teilmenge einer kleinen Menge wieder klein ist,

(iii) die Vereinigung zweier kleiner Mengen stets klein ist,

(iv) jede Teilmenge genau dann groß ist, wenn ihr Komplement klein ist und

(v) alle endlichen Mengen klein sind.

Hinweis: Definiert man für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ genau die Mengen als groß, die n enthalten, dann sind die ersten vier Bedingungen bereits erfüllt.