

Aufgabe 1

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, +, -, 0)$.

- (a) Geben Sie für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die kleinste Substruktur von \mathfrak{A} an, die $\{m, n\}$ enthält. Ist dies eine echte Substruktur?
- (b) Was drücken die folgenden FO-Formeln auf \mathfrak{A} aus? Geben Sie eine möglichst geschickte Beschreibung in Worten an. Achten Sie dabei auf freie Variablen. Können Sie die Formeln auch auf \mathfrak{A} auswerten?
 - (i) $\psi := \forall x \exists y (x + y = 0)$
 - (ii) $\varphi(x) := \exists y (x = y + y + y)$
- (c) Geben Sie alle Redukte von \mathfrak{A} an. Auf welchen dieser Redukte können Sie eine FO-Formel aufstellen, die das Element 0 „beschreibt“? Überlegen Sie sich zunächst eine sinnvolle Definition des Begriffs „beschreiben“.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. Geben Sie FO($\{+, \cdot, 0, 1\}$)-Formeln an, die die folgenden Sachverhalte auf \mathfrak{N} beschreiben. Achten Sie dabei besonders auf die freien Variablen in Ihren Formeln. Erklären Sie kurz die Idee jeder Formel.

- (a) $a \mid b$ (d.h. a teilt b)
- (b) a ist eine Primzahl
- (c) $a < b$