Aufgabe 1

Sei $\mathfrak{A} := (A = \{3,4\}, R, <)$ mit der einstelligen Relationen $R^{\mathfrak{A}} := \{4\}$ und der üblichen Ordnung $<$ auf $\{3,4\}$. Betrachten Sie den Satz

$$\psi := \forall x(Rx \to \exists y(x < y \wedge Ry)) \quad \in \mathrm{FO}(\{R,<\}).$$

(a) Geben Sie das Auswertungsspiel $\mathrm{MC}(\mathfrak{A},\psi)$ an und bestimmen Sie die Gewinnregionen W_σ der beiden Spieler $\sigma \in \{0,1\}$. Kennzeichnen Sie dabei für jede Position $v \in W_\sigma$, in wievielen Schritten Spieler σ von v aus gewinnt, wenn beide optimal spielen.

(b) Beantworten Sie, ob $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt oder nicht, indem Sie eine Gewinnstrategie für einen der Spieler im Auswertungsspiel $\mathrm{MC}(\mathfrak{A},\psi)$ angeben. Ist das die einzige mögliche Gewinnstrategie?

(c) Welche Partie könnte sich in $\mathrm{MC}(\mathfrak{A},\psi)$ ergeben, wenn der Gewinner mit der Strategie aus (b) spielt und der Verlierer möglichst lange überleben möchte? Geben Sie alle Möglichkeiten an. Geben Sie zusätzlich an, wieviele verschiedene Partien insgesamt möglich sind, wenn alle Spieler optimal spielen.

Aufgabe 2

Eine Struktur $\mathfrak{A} = (A,\tau)$ heißt *starr*, wenn die Menge der Automorphismen $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ auf $\mathfrak{A}$ nur den trivialen Automorphismus id_A enthält.

(a) Beweisen Sie: Wenn alle $a \in A$ auf $\mathfrak{A} = (A,\tau)$ elementar definierbar sind, dann ist $\mathfrak{A}$ starr.

(b) Zeigen Sie jeweils, dass die folgenden Strukturen starr sind oder geben Sie einen Automorphismus an, der die Starrheit widerlegt.

(i) $(\mathbb{Z},<)$

(ii) $\mathfrak{Q} := (\mathbb{Q},0,1,+,\cdot,<)$

(iii) $\mathfrak{R} := (\mathbb{R},0,1,+,\cdot,<)$

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die angegebene Funktion oder Relation in der gegebenen Struktur elementar definierbar ist.

Wenn Sie eine Formel angeben, erklären Sie jeweils kurz die Idee der Formel.

(a) $\{0, 2, 4\}$ in $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$

(b) die ggT-Funktion in $(\mathbb{N}, \cdot)$

Hinweis: Die Funktion $\mathsf{ggT}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ bildet zwei Elemente $m, n \in \mathbb{N}$ auf ihren größten gemeinsamen Teiler $\mathsf{ggT}(m, n)$ ab. Alle Zahlen gelten als Teiler von 0 und es ist $\mathsf{ggT}(0, 0) := 0$.

(c) $E := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$ in $(\mathbb{C}, +)$