Aufgabe 1

Eine *vollständige Erweiterung* $T' \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ einer Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ist eine vollständige Theorie, die T enthält, das heißt, T' ist vollständig und $T \subseteq T'$.

Ein *Axiomensystem* einer Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ist eine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mit $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(T)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ genau dann vollständig ist, wenn $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ für eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass jede Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mindestens eine vollständige Erweiterung $T' \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ besitzt.

(c) Betrachten Sie die Theorie T der ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit *höchstens* 2 Knoten, also $|V| \leq 2$.

  (i) Geben Sie ein Axiomensystem Φ für T an.

  (ii) Sind die folgenden Sätze in T?

  - $\forall x(x = x)$
  - $\exists x(x \neq x)$
  - $\exists x \exists y(Exy)$
  - $\neg \exists x \exists y(Exy)$
  - $\exists x \exists y(\neg Exy)$

  (iii) Geben Sie alle vollständigen Erweiterungen von T an. Bestimmen Sie auch für jede vollständige Erweiterung ein *endliches* Axiomensystem.

(d) Gibt es eine endliche Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$?

Aufgabe 2

Betrachten Sie Strukturen $\mathfrak{A} := (\Sigma_2^*, \preceq^{\mathfrak{A}}, C^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} := (\Sigma_{10}^*, \preceq^{\mathfrak{B}}, C^{\mathfrak{B}})$ über der Signatur $\tau = \{\preceq, C\}$. Dabei sind $\Sigma_2 := \{0, 1\}$ und $\Sigma_{10} := \{0, \dots, 9\}$, das zweistellige Relationssymbol $\preceq$ steht jeweils für die *Präfixrelation* auf beiden Strukturen, also

$$\preceq^{\mathfrak{A}} := \{(a, b) \in \Sigma_2^* \times \Sigma_2^* \mid b = ac \text{ für ein } c \in \Sigma_2^*\} \quad \text{und}$$
$$\preceq^{\mathfrak{B}} := \{(a, b) \in \Sigma_{10}^* \times \Sigma_{10}^* \mid b = ac \text{ für ein } c \in \Sigma_{10}^*\},$$

und das dreistellige Relationssymbol C steht jeweils für den *Graphen* der Konkatenation, also

$$C^{\mathfrak{A}} := \{(a, b, c) \in (\Sigma_2^*)^3 \mid a \circ b = c\} \quad \text{und}$$
$$C^{\mathfrak{B}} := \{(a, b, c) \in (\Sigma_{10}^*)^3 \mid a \circ b = c\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ oder geben sie andernfalls das *kleinste* $m \in \mathbb{N}$ an, sodass $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ und geben Sie zusätzlich einen trennenden Satz mit Quantorenrang m, eine Gewinnstrategie für den Herausforderer im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ sowie eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin im Spiel $\mathcal{G}_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an.

Ändert sich die Situation, wenn wir die beiden Relationen entfernen, also auf den $\{\varnothing\}$-Redukten $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ spielen? Welcher Spieler profitiert *im Allgemeinen* davon, wenn Relationen entfernt werden? Wer profitiert, wenn Relationen hinzugefügt werden?

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von τ-Strukturen. Wenn es eine τ-Struktur $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$ gibt, sodass für alle $m \in \mathbb{N}$ eine τ-Struktur $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}$ existiert, dann ist $\mathcal{K}$ nicht FO-axiomatisierbar.

Gilt die Aussage auch, wenn wir stattdessen $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{A}_m \notin \mathcal{K}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ voraussetzen? Lässt sich dann immer noch etwas über die FO-Axiomatisierbarkeit von $\mathcal{K}$ schließen?