Aufgabe 1

In dieser Aufgabe geht es um den Sequenzenkalkül der Prädikatenlogik.

(a) Zeigen Sie mithilfe des Sequenzenkalküls der Prädikatenlogik, dass es keine Menge gibt, die genau die Mengen enthält, die sich *nicht* selbst enthalten.

Formalisieren Sie die Aussage zunächst über der Signatur $\tau = \{\in\}$, Ihre Formel soll also über Strukturen sprechen, deren Elemente Mengen darstellen.

Stellen Sie dann eine geeignete Sequenz auf und weisen Sie die Gültigkeit dieser Sequenz *nur* mit dem Sequenzenkalkül *ohne* semantische Argumente oder Umformungen nach.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie semantisch die Korrektheit der folgenden Schlussregel. Verwenden Sie *nicht* den Sequenzenkalkül.

$$\frac{\Gamma, \neg\varphi(c,c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \exists y \varphi(x,y)} \qquad \text{wobei } c \textit{ nicht} \text{ in } \Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\} \text{ vorkommt}$$

Was passiert, wenn c in φ vorkommen darf?

Aufgabe 2

Sei $\mathfrak{A} := (\Sigma^*, \circ)$, wobei das Alphabet $\Sigma := \{0, \dots, 9\}$ ist, Σ^* die Menge der endlichen Wörter über Σ und $\circ$ die Konkatenation $a \circ b = ab$ zweier Wörter. Wir definieren die Relation $\approx \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ mit

$$a \approx b \quad \text{gdw.} \quad |a| = |b| \text{ oder } |a|, |b| \geq 5,$$

wobei $|\bullet|$ die Länge eines Wortes bezeichnet.

Zeigen Sie, dass $\approx$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$ ist und beschreiben Sie die Faktorstruktur $\mathfrak{A}/\approx$, indem Sie eine möglichst einfache Struktur angeben, die isomorph zu $\mathfrak{A}/\approx$ ist. Wieviele Elemente hat die Faktorstruktur?