Aufgabe 1

Sei $\tau = \{\cdot, 0, 1\}$, wobei $\cdot$ ein zweistelliges Funktionssymbol sowie 0 und 1 Konstantensymbole sind. Wir betrachten die folgende Menge T von atomaren Sätzen:

$$T := \{0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 1, 1 \cdot 0 = 1, 1 \cdot 1 = 1\}$$

Sei weiterhin Σ die kleinste Menge, die unter Substitution abgeschlossen ist und T enthält. Die Relation $\sim$ sei die durch Σ induzierte Kongruenzrelation auf der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$.

(a) Bestimmen Sie Σ und begründen Sie dabei insbesondere, warum die von Ihnen konstruierte Menge Σ tatsächlich minimal ist.

(b) Geben Sie mindestens drei verschiedene Elemente der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$ an. Argumentieren Sie, ob die Notation $0 \cdot 1 \cdot 0$ ein wohldefiniertes Element von $\mathfrak{H}(\Sigma)$ bezeichnet.

(c) Geben Sie das kanonische Modell $\mathfrak{A}(\Sigma) := (\mathfrak{H}(\Sigma)/{\sim})$ explizit mit Multiplikationstabelle an. Zu welcher möglichst einfachen Struktur ist $\mathfrak{A}(\Sigma)$ isomorph?

Aufgabe 2

Für eine Klasse $\mathcal{K}$ von τ-Strukturen bezeichnen wir mit $\overline{\mathcal{K}}$ das *Komplement*, also die Klasse aller τ-Strukturen, die *nicht* in $\mathcal{K}$ sind.

Sei $\mathcal{K}$ eine beliebige Klasse von τ-Strukturen. Zeigen Sie, dass wenn $\mathcal{K}$ und $\overline{\mathcal{K}}$ *beide* FO-axiomatisierbar sind, beide bereits endlich axiomatisierbar sind.