Aufgabe 1

Geben Sie für die folgenden Klassen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an und erklären Sie kurz die Idee Ihres Axiomensystems. Falls die Klasse nicht (endlich) axiomatisierbar ist, beweisen Sie dies mit einer Methode Ihrer Wahl.

Dabei sind E und $\sim$ zweistellige Relationssymbole, c ist ein Konstantensymbol, f ist ein einstelliges Funktionssymbol, R ist ein einstelliges Relationssymbol und $\circ$ ist ein zweistelliges Funktionssymbol.

(a) die Klasse der zusammenhängenden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$

(b)

$$\begin{aligned}\{(A, \sim) \mid\ & \sim \text{ ist eine Äquivalenzrelation auf } A \text{ und} \\ & \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gibt es eine Äquivalenzklasse} \\ & \text{von } \sim \text{ mit genau } n \text{ Elementen}\}\end{aligned}$$

(c) die Klasse der endlichen Herbrandstrukturen über $\tau = \{c, f, R\}$

(d) die Klasse der zyklischen Gruppen $(G, \circ)$

Hinweis: Eine *zyklische* Gruppe ist eine Gruppe, die bereits durch ein einziges Element $a \in G$ erzeugt ist, es gibt also ein $a \in G$, sodass sich jedes $b \in G$ darstellen lässt als $b = a^z$ für ein $z \in \mathbb{Z}$. Dabei ist $a^0 = e$ das neutrale Element, $a^n = a^{n-1} \circ a$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ induktiv definiert als die n-fache Verknüpfung von a und $a^{-n} = (a^n)^{-1}$ das Inverse zu a^n.

Konkrete Beispiele für zyklische Gruppen sind $(\mathbb{Z}, +)$, oder $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(e) $\{\mathfrak{B} \in \mathrm{Str}(\tau) \mid \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$, wobei τ eine *endliche* Signatur ist und $\mathfrak{A}$ eine feste τ-Struktur ist

Hinweis: Die richtige Antwort hängt von $\mathfrak{A}$ ab.