Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

Sommersemester 2022

1. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 19. April um 16:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Organisatorische Hinweise: Der Übungsbetrieb läuft online über Moodle.

- **Gruppenanmeldung**: Melden Sie sich hier in eine Abgabegruppe von 3–4 Personen an.
- **Regeln**: Bitte lesen und beachten Sie die Regeln für den Übungsbetrieb.
- **Korrektur und Lösungen**: Die Lösungen der regulären Übungsblätter werden Ihnen als Videos über Moodle zur Verfügung gestellt. Sie erhalten Korrekturen ebenfalls über Moodle. Bitte beachten Sie, dass es dafür keinen festen Termin gibt, Lösungen und Korrekturen werden nach Ihrer Abgabe hochgeladen, sobald sie fertiggestellt wurden.
- Im regulären Übungsbetrieb wird es einige freiwillige Aufgaben geben. Diese Aufgaben werden mit ● markiert. Sie werden *nicht* korrigiert und zählen nicht für die Zulassung. Trotzdem empfehlen wir Ihnen **dringend**, diese Aufgaben zu bearbeiten, da alle Inhalte wichtig für die Klausur sind. In den Lösungsvideos wird es auch Lösungen zu den freiwilligen Aufgaben geben.

Aufgabe 1 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 1" zu absolvieren.

Aufgabe 2 $2 + (2 + 2) + 3 = 9$ Punkte

Eine Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ heißt *nicht-trivial*, wenn sowohl φ als auch $\neg\varphi$ erfüllbar ist. Außerdem definieren wir den Junktor „$\oplus$" durch $[\![\varphi \oplus \psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} \neq [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$ (exklusives Oder).

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Eine Formel φ ist nicht-trivial genau dann, wenn weder φ noch $\neg\varphi$ eine Tautologie ist.

(b) Sind folgende Formeln Tautologien, nicht-trivial oder unerfüllbar? Argumentieren Sie semantisch mittels Interpretationen (ohne Wahrheitstabellen und Äquivalenzumformungen).

(i) $(X \wedge (Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow (1 \rightarrow Y)$

(ii) $(\neg(M \rightarrow N) \wedge \neg(P \rightarrow Q)) \wedge ((M \vee N) \oplus (P \vee Q))$

(c) Zeigen Sie nur durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln logisch äquivalent sind.

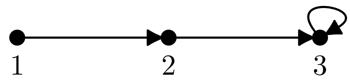
$$(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge D) \text{ und } \neg((A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow D)) \rightarrow ((B \rightarrow D) \wedge (B \rightarrow C))$$

Hinweis: Sie dürfen auch die Äquivalenz $\psi \rightarrow \varphi \equiv \neg\psi \vee \varphi$ für $\psi, \varphi \in \mathrm{AL}$ verwenden.

Aufgabe 3 $2 + 4 = 6$ Punkte

Wir ordnen einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$ die Interpretation $\mathfrak{I}_G$ über der Variablenmenge $\tau_n := \{X_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ zu, sodass $\mathfrak{I}_G(X_{ij}) = 1$ genau dann, wenn in G eine gerichtete Kante von i nach j existiert, d.h. $(i, j) \in E$.

(a) Geben Sie eine Formel φ mit $\tau(\varphi) = \tau_3$ an, sodass $\mathfrak{I}_G \models \varphi$ exakt für folgenden Graphen gilt:



(b) Konstruieren Sie zunächst für $n = 4$ und dann für beliebige n Formeln φ_n mit Signatur τ_n, die ausdrücken, dass der Graph stark zusammenhängend ist (d.h. für alle Knotenpaare $1 \leq i, j \leq n$ gibt es einen gerichteten Pfad von i nach j).

Aufgabe 4 $2 + 3 = 5$ Punkte

(a) Konstruieren Sie eine Formel $\varphi(X_0, X_1, X_2, X_3)$, so dass für alle dazu passenden Interpretationen $\mathfrak{I}\colon \{X_0, X_1, X_2, X_3\} \to \{0, 1\}$ gilt, dass $\mathfrak{I}$ genau dann ein Modell von φ ist, wenn $|\{i : \mathfrak{I}(X_i) = 1\}|$ durch drei teilbar ist.

(b) Geben Sie für jedes n eine Formel $\psi_n(X_0, \dots, X_{n-1})$ an, sodass $\mathfrak{I}$ genau dann ein Modell von ψ_n ist, wenn $|\{i : \mathfrak{I}(X_i) = 1\}|$ durch drei teilbar ist.

Aufgabe 5$^\bullet$ keine Punkte

In dieser Aufgabe geht es um das bekannte Spiel „Among Us“, in dem eine Raumschiffcrew ihr Schiff reparieren muss, während sie von mordlustigen Aliens in Gestalt ihrer Kameraden (sogenannte Impostors) tyrannisiert wird. Regelmäßig kommt es zu Diskussionsrunden, in denen die Spieler sich auf Basis ihrer Beobachtungen auf eine Person einigen müssen, die des Schiffes verwiesen wird, in der Hoffnung, einen Impostor loszuwerden.

In solch einer Situation befinden sich nun Paula, Quentin, Richard und Sarah. Zur Identifizierung des Impostors möchten sie diesmal die Aussagenlogik zur Hilfe nehmen. Folgende Informationen stehen ihnen zur Verfügung. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass jeder Spieler genau eins von zwei Verhaltensmustern annehmen kann: Entweder, er oder sie lügt oder sagt die Wahrheit. Sagt jemand die Wahrheit, so sind alle seine Aussagen zutreffend; ansonsten können beliebig viele (auch keine) seiner Aussagen falsch sein.

(1) Genau einer der Spieler ist ein Impostor.

(2) Wenn ein Spieler lügt, dann ist er ein Impostor; dies gilt nicht für Quentin, von dem alle wissen, dass er sich unberechenbar verhält und manchmal auch zum Spaß lügt.

(3) Laut Paulas Aussage kann Sarah kein Impostor sein, da sie sie bei Reparaturarbeiten am Raumschiff beobachtet hat.

(4) Nur als Impostor kann man durch Lüftungsschächte (vents) gehen.

(5) Quentin und Richard sagen, sie seien immer zusammen unterwegs gewesen, d.h. entweder sagen sie beide die Wahrheit oder sie lügen beide.

(6) Quentin behauptet, er hätte Sarah in einen Lüftungsschacht verschwinden sehen.

(a) Definieren Sie eine geeignete Variablenmenge und deren intendierte Semantik. Unterscheiden Sie durch Ihre Notation explizit zwischen Syntax und Semantik.

(b) Formalisieren Sie die Bedingungen (1) bis (6) in der Aussagenlogik, indem Sie für jede Bedingung eine aussagenlogische Formel angeben.

(c) Bestimmen Sie anhand Ihrer Formeln den Impostor. Argumentieren Sie semantisch mithilfe von Interpretationen (insbesondere nicht über Wahrheitstabellen oder Äquivalenzumformungen).