Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

Sommersemester 2022

2. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 26. April um 16:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 7 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 2“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $3 + 3 = 6$ Punkte

Verwenden Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, um folgende Fragen zu beantworten. Geben Sie dabei für jeden Schritt die Menge der markierten Variablen an.

(a) Ist folgende Formel erfüllbar? Wenn ja, geben Sie das kleinste Modell an.

$$(\neg X \lor W) \land (X \land Z \rightarrow 0) \land (1 \rightarrow X) \land (W \rightarrow Y) \land (\neg W \lor \neg X \lor Z) \land (\neg Z \lor \neg Y \lor Q)$$

(b) Gilt folgende Folgerungsbeziehung?

$$\{A \land B \land C \rightarrow D, A \land D \rightarrow E, A, E \land D \land C \rightarrow B, B \land B \rightarrow C\} \models C \rightarrow (A \land B \land F)$$

Aufgabe 3 — $2 + 4 = 6$ Punkte

(a) Beweisen Sie, dass die Modelle von Horn-Formeln unter Schnitt abgeschlossen sind, d.h.: Sei φ eine Horn-Formel und seien $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}' : \tau(\varphi) \longrightarrow \{0,1\}$ Modelle von φ. Dann ist auch $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}'$ ein Modell von φ. Hierbei ist $(\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}') : \tau(\varphi) \longrightarrow \{0,1\}$ definiert durch $(\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}')(X) := \min(\mathfrak{I}(X), \mathfrak{I}'(X))$, für alle $X \in \tau(\varphi)$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Formeln äquivalent zu einer Horn-Formel sind:

(i) $(X \rightarrow (\neg X \lor Y)) \land \neg((Z \rightarrow X) \lor (\neg Z \land Y))$.

(ii) $(X \land (A \rightarrow B)) \lor \neg(Y \rightarrow A) \lor Z$.

Aufgabe 4 — 8 Punkte

Seien Φ, Ψ und Θ beliebige aussagenlogische Formelmengen und $\varphi, \psi, \vartheta \in$ AL. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Zum Widerlegen ist ein Gegenbeispiel anzugeben.

(a) Wenn $\Phi \models \varphi$, dann gilt auch $\Psi \models \varphi$ für alle (i) $\Psi \subseteq \Phi$, beziehungsweise (ii) $\Psi \supseteq \Phi$.

(b) Wenn $\Phi \models \psi$ für alle $\psi \in \Psi$ und $\Psi \models \varphi$, dann auch $\Phi \models \varphi$.

(c) Sei $\Phi_0 \supseteq \Phi_1 \supseteq \cdots$, und $\Phi_n \models \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n \models \varphi$.

(d) Wenn ($\Phi \cup \Theta \models \varphi$ oder $\Psi \cup \Theta \models \psi$) gilt, dann gilt auch ($\Phi \models \varphi$ oder $\Psi \models \psi$).

(e) Es sei $\neg\psi \in \Phi$. Wenn $\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi$ und $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \models \psi$, dann ist Φ unerfüllbar.

Aufgabe 5● keine Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen funktional vollständig sind.

(a) $\{1, ⌑\}$, wobei $x ⌑ y := \max(0, x - y)$.

(b) $\{f, 1\}$, wobei $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ genau dann gilt, wenn $|\{i \in \{1,2,3\} \mid x_i = 0\}| \geq 2$.

(c) $\{g, 0\}$, wobei $g(x_1, x_2, x_3) = 1$ genau dann gilt, wenn $|\{i \in \{1,2,3\} \mid x_i = 0\}| \leq 2$.