Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

Sommersemester 2022

3. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 3. Mai um 16:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 8 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 3" zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $3 + 2 + 3 = 8$ Punkte

(a) Überprüfen Sie mit der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel eine Tautologie ist:

$$(P \wedge Q) \vee (R \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R).$$

(b) Überprüfen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee \neg Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y).$$

(c) Überprüfen Sie mit der Resolutionsmethode, ob die folgende semantische Folgerung gilt:

$$\{(\neg Z \vee \neg Y), (\neg Y \vee X), (\neg Z \vee X), (Y \vee Z), (\neg X \vee Z \vee \neg Y)\} \models Z \wedge \neg Y \wedge X.$$

Aufgabe 3 — 5 Punkte

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls es eine Partition der Knoten $V := A \cup B$ in genau zwei Mengen A und B gibt, sodass jeweils keine Kanten innerhalb von A und B existieren, d.h. jede Kante hat einen Endpunkt in A und einen Endpunkt in B. Zeigen Sie, dass ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ genau dann bipartit ist, wenn jeder endliche Teilgraph $H = (V', E')$ von G bipartit ist.

Hinweis: Formalisieren Sie eine Partition der Knoten $V = A \cup B$ des ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit den Aussagenvariablen $\tau_G := \{X_v \mid v \in V\}$. Wenden Sie dann den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik auf eine geeignete Formelmenge an.

Aufgabe 4 — $1 + 3 + 3 = 7$ Punkte

Wir erweitern den Äquivalenzbegriff auf aussagenlogische Formelmengen $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}$, indem wir festlegen, dass $\Phi \equiv \Psi$, wenn für jede Interpretation $\mathfrak{I}$, die passend für Φ und Ψ ist, $\mathfrak{I} \models \Phi$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{I} \models \Psi$. Für Formeln $\psi \in \mathrm{AL}$ schreiben wir $\Phi \equiv \psi$ als Kurzschreibweise für $\Phi \equiv \{\psi\}$. Außerdem nennen wir die Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ *redundant*, wenn es eine Formel $\varphi \in \Phi$ gibt, sodass $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$.

(a) Für welche Formeln $\varphi \in \mathrm{AL}$ ist eine Menge der Form $\{\varphi\}$ redundant?

(b) Zeigen Sie, dass jede endliche Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine äquivalente nicht redundante Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ enthält, d.h. Φ_0 ist nicht redundant, und es gilt $\Phi_0 \models \varphi$ für jedes $\varphi \in \Phi$.

(c) Beweisen Sie, dass eine Formelmenge Φ genau dann redundant ist, wenn es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt, die redundant ist.

Aufgabe 5$^\bullet$ keine Punkte

Wir definieren die *Doppelresolution* analog zum Resolutionsverfahren aus der Vorlesung, jedoch mit einem neuen Resolventenbegriff: Seien C, C_1, C_2 Klauseln. C heißt *Doppelresolvente* von C_1 und C_2, falls es (nicht notwendigerweise verschiedene) Literale Y, Z gibt, so dass $\{Y, Z\} \subseteq C_1$, $\{\overline{Y}, \overline{Z}\} \subseteq C_2$ und

$$C = (C_1 \setminus \{Y, Z\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{Y}, \overline{Z}\}).$$

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Der Doppelresolutionskalkül ist vollständig.

(b) Der Doppelresolutionskalkül ist korrekt.