

4. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 10. Mai um 16:00 Uhr online im [Moodle-Lernraum](#).

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1

10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im [Moodle-Lernraum](#) der Veranstaltung unter „eTest 4“ zu absolvieren.

Aufgabe 2

3 + 4 = 7 Punkte

- (a) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül einen Beweis oder eine falsifizierende Interpretation für folgende Sequenz:

$$(Z \rightarrow Y) \vee (Z \rightarrow X), X \wedge Y, (W \wedge X) \vee (W \wedge Z) \Rightarrow (Z \rightarrow X) \rightarrow W, Y \vee Z$$

- (b) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül einen Beweis oder eine falsifizierende Interpretation, um die Erfüllbarkeit der folgenden Formel nachzuweisen bzw. zu widerlegen:

$$(\neg X \rightarrow Y) \vee \neg(Y \rightarrow X)$$

Aufgabe 3

3 + 3 = 6 Punkte

Eine Schlussregel heißt korrekt, wenn aus der Gültigkeit der Prämissen die Gültigkeit der Konklusion folgt. Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln. Argumentieren Sie dabei semantisch, d.h. *nicht* mittels Ableitungen im Sequenzenkalkül.

(a)
$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \oplus \varphi}$$

(b)
$$\frac{\Gamma, \neg\psi, \neg\varphi \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \neg\vartheta}$$

Aufgabe 4

7 Punkte

Nutzen Sie den Kompaktheitssatz, um zu zeigen, dass $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, also die Menge aller Teilmengen von \mathbb{Q} , in zwei Teile, nämlich die „einfachen“ und die „schwierigen“ Mengen, partitioniert werden kann, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Jedes $A \subseteq \mathbb{Q}$ ist entweder einfach oder schwierig, aber nicht beides.
- (2) Eine Menge ist genau dann schwierig, wenn ihr Komplement einfach ist.
- (3) Alle endlichen Mengen sind einfach.

(4) Die Vereinigung zweier einfacher Mengen ist ebenfalls einfach.

(5) Teilmengen von einfachen Mengen sind einfach.

Hinweis: Beobachten Sie, dass man ohne Bedingung (3) genau die Mengen als schwierig bezeichnen könnte, die eine feste Zahl $q \in \mathbb{Q}$ enthalten.

Aufgabe 5 ●

keine Punkte

Geben Sie Schlussregeln ($| \Rightarrow$) und $(\Rightarrow |)$ für den Junktor $|$ mit $\varphi | \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \psi)$ an, die analog zu den anderen Schlussregeln des Sequenzenkalküls den Junktor auf der linken bzw. rechten Seite einführen. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schlussregeln.