Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

Sommersemester 2022

5. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 17. Mai um 16:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

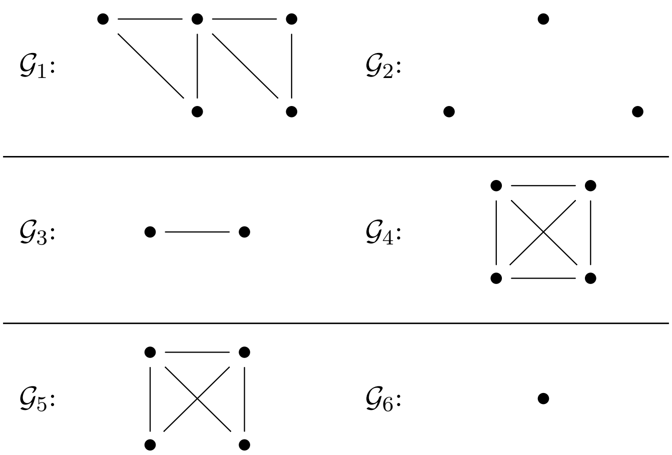
Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 5“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ Punkte

Wir betrachten folgende ungerichtete Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$:



Bestimmen Sie, in welchen dieser Graphen folgende Sätze jeweils gelten. Begründen Sie Ihre Antworten, indem Sie die Bedeutung der jeweiligen Sätze kurz in möglichst klaren Worten erklären (d.h. ohne die Formel „wortwörtlich“ in natürliche Sprache zu übersetzen).

(a) $\varphi_1 := \exists x \exists y \exists z (Exy \land Eyz \land Ezx)$.

(b) $\varphi_2 := \forall x \forall y Exy$.

(c) $\varphi_3 := \exists x \exists y (x \neq y \land \forall z ((z \neq x \land z \neq y \land (Exz \lor Eyz)) \to (Exz \land Eyz)))$.

(d) $\varphi_4 := \forall x \exists y (Exy \land \forall z ((Eyz \land y \neq x) \to \neg Ezx))$.

Aufgabe 3 $1 + 2 + 2 + 3 = 8$ Punkte

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, N^{\mathfrak{R}})$ der Signatur $\tau = \{+, \cdot, N\}$, mit der üblichen Addition und Multiplikation sowie $N^{\mathfrak{R}} = \mathbb{N}$. Drücken Sie die folgenden Sachverhalte in $\mathrm{FO}(\tau)$ aus. Achten Sie dabei auf die freien Variablen Ihrer Formeln.

(a) $x = 0$.

(b) $x = y + 1$.

(c) x ist eine irrationale Zahl.

(d) x ist eine Primpotenz, d.h. $x = p^n$ für eine Primzahl p und ein $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 $3 + 3 = 6$ Punkte

(a) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen über dem Universum A bzw. B, sodass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Zeigen Sie per Induktion über den Termaufbau: Für jeden Term t und jede Belegung $\beta\colon \mathrm{var}(t) \mapsto A$ gilt

$$[\![t]\!]^{(\mathfrak{A},\beta)} = [\![t]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)}.$$

(b) Sei τ eine Signatur und sei $\mathfrak{B}$ eine τ-Struktur. Beweisen Sie, dass für jede quantorenfreie Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ und alle Substrukturen $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ für alle $a_1, \ldots, a_k$ aus dem Universum von $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k).$$

Folgern Sie: Für jeden FO-Satz $\psi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \varphi(x_1, \ldots, x_k)$, mit φ quantorenfrei, gilt: Wenn $\mathfrak{B} \models \psi$, dann gilt auch für jede Substruktur $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$: $\mathfrak{A} \models \psi$.

Aufgabe 5* 6* Punkte

Nutzen Sie *nur* das Lemma von Zorn, um direkt das Lemma von König zu zeigen. Verwenden Sie insbesondere *nicht* den Kompaktheitssatz.

Gehen Sie dabei wie folgt vor: Sei $T = (V, E)$ ein endlich verzweigter Baum mit Wurzel $w \in V$, in dem es beliebig lange, endliche Wege gibt. Betrachten Sie die partielle Ordnung $(A, <)$ mit

$$\begin{aligned} A := \{W \subseteq V \mid\ & W \text{ enthält die Wurzel } w \text{ und} \\ & \text{der durch } W \text{ induzierte Teilgraph } T[W] \text{ von } T \\ & \text{ist ein Baum, der beliebig lange, endliche Wege enthält}\}, \end{aligned}$$

geordnet durch die *umgekehrte* Inklusionsbeziehung: $W_1 < W_2$ genau dann, wenn $W_1 \supsetneq W_2$.

Zeigen Sie, dass $(A, <)$ die Voraussetzungen für das Lemma von Zorn erfüllt und folgern Sie daraus, dass T einen unendlichen Weg enthält.

Aufgabe 6• keine Punkte

In den folgenden Teilaufgaben ist jeweils eine Struktur $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ gegeben und einige Teilmengen $B \subseteq A$ des Universums der jeweiligen Struktur. Beantworten Sie für jede dieser Teilmengen, ob es eine Substruktur von $\mathfrak{A}$ über dem Universum B gibt. Wenn *nicht*, dann geben Sie *mit Begründung* die kleinste Substruktur von $\mathfrak{A}$ an, die B enthält. Die Symbole $+$, $-$ und $\cdot$ sowie $\cup$ und $\cap$ haben die übliche Bedeutung in den jeweiligen Strukturen.

(a) Betrachten Sie die Struktur $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, +, -, \cdot)$ mit den Teilmengen

(i) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (die Menge der natürlichen Zahlen) und

(ii) $2\mathbb{Z} = \{2 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ (die Menge der geraden Zahlen).

(b) Betrachten Sie die Struktur $\mathfrak{Q} := (\mathbb{Q}, +, -, \cdot, ^{-1})$, wobei $^{-1}$ das multiplikative Inverse

$$q^{-1} := \begin{cases} 0 & \text{falls } q = 0 \text{ und} \\ 1/q & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } q \in \mathbb{Q}$$

ist, mit den Teilmengen

(i) $\{1\}$ und

(ii) $\{0\}$.

(c) Betrachten Sie die Struktur $\mathfrak{B} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, \overline{})$, wobei $\overline{}$ das Komplement

$$\overline{A} := \mathbb{N} \setminus A \qquad \text{für } A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

ist, mit den Teilmengen

(i) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ ist endlich}\}$ und

(ii) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ und } \overline{A} \text{ sind beide unendlich}\}$.