Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

Sommersemester 2022

6. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 24. Mai um 16:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 6“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 $2 + 2 = 4$ Punkte

Sei $\tau = \{E, P, R, d\}$, wobei P ein einstelliges Relationssymbol ist, E und R zweistellige Relationssymbole und d ein Konstantensymbol. Bringen Sie die folgenden Formeln erst in Negationsnormalform und dann in Pränex-Normalform. Achten Sie dabei auf freie Variablen. Achten Sie auch darauf, genug Umformungsschritte anzugeben, damit Ihr Lösungsweg nachvollziehbar ist.

(a) $\forall x \forall y \exists z (Exy \land \neg Eyz \land Ezx) \to (\forall x Px \to \exists x \forall y \neg (Exy \land Edx))$

(b) $\exists y Rxy \to \forall x Rxx$

Aufgabe 3 $2 + 2 + 2 = 6$ Punkte

Sei τ eine beliebige Signatur, $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ Formeln der Prädikatenlogik und $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Formelmenge. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Wenn $\forall x \varphi \equiv \forall y \varphi$, dann auch $\exists x \varphi \equiv \exists y \varphi$.

(b) Ist $\varphi \not\equiv \psi$, so gilt $\Phi \not\models \varphi$ oder $\Phi \not\models (\varphi \land \psi)$.

(c) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\forall x \varphi \models \forall x \psi$, dann gilt bereits $\Phi \models \psi$.

Aufgabe 4 $2 + 3 + 3 = 8$ Punkte

Seien c, d und e Konstantensymbole, f ein einstelliges Funktionssymbol, $\circ$ ein zweistelliges Funktionssymbol, sowie E ein zweistelliges Relationssymbol.

Geben Sie ein, *wenn möglich endliches*, Axiomensystem für die folgenden Klassen von Strukturen an. Erklären Sie dabei jeweils kurz die Idee Ihres Axiomensystems. Falls Sie ein unendliches Axiomensystem angeben, müssen Sie *nicht* beweisen oder begründen, warum kein endliches Axiomensystem existiert.

(a) $\mathcal{K}_1 = \{(A, f) \mid \text{f ist surjektiv, aber nicht injektiv}\}$.

(b) $\mathcal{K}_2 := \{(G, \circ, e) \mid (G, \circ, e) \text{ ist eine Gruppe mit } 5 \leq |G| \leq 7\}$.

(c) $\mathcal{K}_3 =$

$$\{(V, E, c, d) \mid G = (V, E) \text{ ist ein } \textit{ungerichteter} \text{ Graph und der Knoten } d \text{ ist von } c \text{ aus in } G \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\}.$$

Aufgabe 5 $1 + 2 = 3$ Punkte

(a) Wenn man eine Formel ψ in Skolem-Normalform transformiert, ist die resultierende Formel im Allgemeinen nicht termreduziert, selbst wenn ψ termreduziert war. Wieso nicht? Geben Sie ein Beispiel an.

(b) Gibt es dennoch immer eine zu ψ erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolem-NF, die termreduziert ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6● keine Punkte

Betrachten Sie die Struktur $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ und den Satz $\psi = \forall x \exists y (x + y = 0)$.

(a) Geben Sie eine *unendliche* Substruktur von $\mathfrak{A}$ an, die den Satz ψ *nicht* erfüllt.

(b) Formen Sie ψ zu einem Satz φ in Skolem-Normalform um. Ist φ logisch äquivalent zu ψ?

(c) Geben Sie eine Expansion $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ an, die φ erfüllt.

(d) Gibt es eine Substruktur von $\mathfrak{B}$, die ψ nicht erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.