Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

Sommersemester 2022

7. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 31. Mai um 16:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

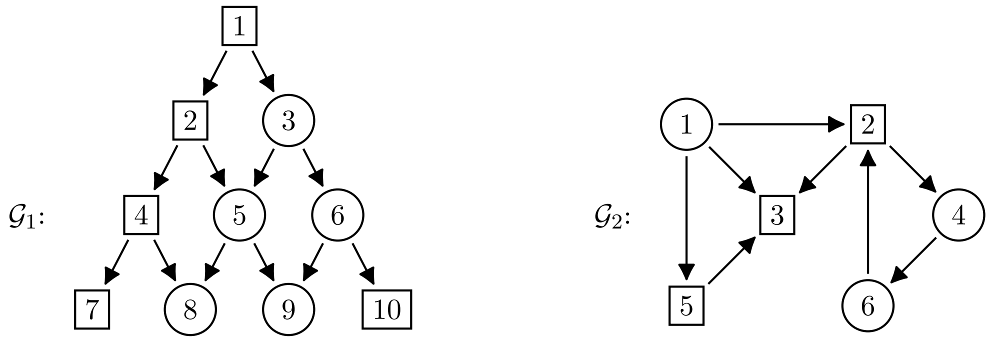
Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 8 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 7“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $2 + 2 + 4 = 8$ Punkte

Wir betrachten folgende Spielgraphen (eingekreiste Knoten gehören Spieler 0, rechteckige Knoten Spieler 1).



(a) Berechnen Sie (ohne Angabe von Zwischenschritten) die Gewinnregionen W_0 und W_1 von Spieler 0 und Spieler 1 in $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$.

(b) Sind die Spiele $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ fundiert? Sind sie determiniert? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Erinnerung: Ein Spiel heißt *fundiert*, wenn jede mögliche Partie endlich ist.)

(c) Beweisen Sie, dass jedes fundierte Spiel determiniert ist, sogar wenn der Spielgraph unendlich ist.

Aufgabe 3 — 4 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (A = \{1, 2, 3\}, P, Q, E)$ mit den einstelligen Relationen $P^{\mathfrak{A}} := \{3\}$ und $Q^{\mathfrak{A}} := \{1, 2\}$ sowie der zweistelligen Relation $E^{\mathfrak{A}} := \{2\} \times \{1, 3\}$. Betrachten Sie den Satz

$$\psi := \forall y(\neg Py \land Qy) \lor \exists x(Exx). \quad \in \mathrm{FO}(\{P, Q, E\})$$

Geben Sie das Auswertungsspiel $\mathsf{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ an und beantworten Sie, ob $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt oder nicht, indem Sie eine Gewinnstrategie für einen der Spieler im Auswertungsspiel $\mathsf{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ angeben.

Aufgabe 4 $2+2+2+2 = 8$ Punkte

Geben Sie FO-Formeln an, welche die jeweilige Relation bzw. Funktion in der angegebenen Struktur elementar definieren oder beweisen Sie, dass es keine solche Formel gibt.

(a) Die Konstante 1 in $(\mathbb{N}, +)$.

(b) Die Konstante 1 in $(\mathbb{Z}, +)$.

(c) Die Menge $\mathbb{Q} \setminus \{17\}$ in $(\mathbb{Q}, <)$.

(d) Die Funktion $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jede natürliche Zahl n auf die nächste Primzahl $p \geq n$ abbildet, in $(\mathbb{N}, 0, 1, \cdot, <)$.

Aufgabe 5[●] keine Punkte

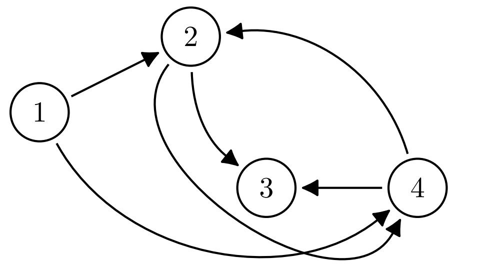
Für eine Struktur $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ bezeichnet $\mathsf{Aut}(\mathfrak{A})$ die Menge aller Automorphismen auf $\mathfrak{A}$. Wir nennen $\mathfrak{A}$ *starr*, wenn $\mathsf{Aut}(\mathfrak{A}) = \{\mathsf{id}_A\}$, d.h., wenn es auf $\mathfrak{A}$ nur den trivialen Automorphismus id_A gibt.

(a) Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn in einer Struktur $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ jedes Element $a \in A$ elementar definierbar ist, dann ist $\mathfrak{A}$ starr.

(b) Zeigen Sie jeweils, dass die folgenden Strukturen starr sind oder geben Sie einen Automorphismus an, der die Starrheit widerlegt.

(i) $(\mathbb{N}, \mathbb{P}, \cdot)$, wobei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen ist

(ii) der folgende Graph $\mathcal{G} = (V, E)$:



(c) Sei Σ ein endliches Alphabet und $\mathfrak{A} := (\Sigma^*, \circ)$, wobei Σ^* die Menge aller endlichen Wörter über Σ ist und $\circ$ die Funktion ist, die zwei Wörter auf ihre Konkatenation abbildet.

Geben Sie alle Automorphismen $\mathsf{Aut}(\mathfrak{A})$ auf $\mathfrak{A}$ an und zeigen Sie insbesondere, dass es außer den von Ihnen angegebenen Automorphismen keine weiteren gibt.