Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

Sommersemester 2022

8. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den **14. Juni (nicht am 7. Juni!)** um 16:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

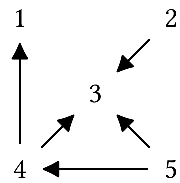
Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

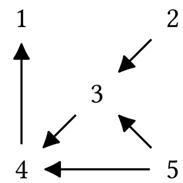
Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 8“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $4 + 4 = 8$ Punkte

Geben Sie jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ an, für die $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ gilt, oder zeigen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Geben Sie im ersten Fall einen trennenden Satz φ vom Quantorenrang m sowie eine Gewinnstrategie für den Herausforderer im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an.

(a) $\mathfrak{A} =$ 

$\mathfrak{B} =$ 

(b) $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}_{\geq 0}, <^{\mathfrak{A}})$, wobei $<^{\mathfrak{A}}$ die übliche Ordnung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist, und $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}^*, <^{\mathfrak{B}})$, wobei $\mathbb{Z}^*$ die Menge der endlichen Zahlenfolgen ist, deren Glieder ganzzahlig sind und $<^{\mathfrak{B}}$ die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{Z}^*$. Mit lexikographischer Ordnung ist gemeint: Für zwei Zahlenfolgen $a = (a_1, \dots, a_k), b = (b_1, \dots, b_\ell) \in \mathbb{Z}^*$ gilt $a <^{\mathfrak{B}} b$ genau dann, wenn an der ersten Position $i \leq \min\{k, \ell\}$, an der sich die beiden Zahlenfolgen unterscheiden, $a_i < b_i$ gilt, oder wenn $a_i = b_i$ für alle $1 \leq i \leq \min\{k, \ell\}$ und $k < \ell$, also a ein „echtes Anfangsstück“ von b ist.

Hinweis: Einige Elemente von $\mathbb{Z}^*$ sind zum Beispiel $(1, -2, 0)$, (5), $(1, -10, 3, 3)$ und $\varepsilon = ()$ (die leere Folge). Es gilt zum Beispiel $(1, -2, 0) <^{\mathfrak{B}} (5)$ und $(1, -10, 3, 3) <^{\mathfrak{B}} (1, -2, 0)$, sowie $(1, 2, 3) <^{\mathfrak{B}} (1, 2, 3, 2)$. Die leere Folge ε ist das minimale Element in $\mathfrak{B}$.

Aufgabe 3 — 3 Punkte

Sei $\mathcal{K}$ eine axiomatisierbare Klasse von τ-Strukturen und $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, sodass $\mathfrak{A} \notin \mathcal{K}$. Zeigen Sie, dass dann ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt: Für alle $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ ist $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$.

Aufgabe 4 — $3 + 6 + 3^* = 9 + 3^*$ Punkte

Eine Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ heißt *vollständige Erweiterung* einer Theorie $T' \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$, falls T vollständig ist und $T' \subseteq T$ gilt. $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ heißt *(endlich) axiomatisierbar*, falls es eine (endliche) Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mit $\mathsf{Mod}(\Phi) = \mathsf{Mod}(T)$ gibt. In diesem Fall nennt man Φ ein *Axiomensystem* für T.

(a) Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Theorie. Zeigen Sie, dass T genau dann vollständig ist, wenn $T = \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ für eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt.

(b) Geben Sie jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem für T und für jede vollständige Erweiterung von T an.

  (i) Die Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\{E\})$ der ungerichteten Graphen (V, E) mit $|V| = 3$.

  (ii) Die Theorie $T = \{\varphi \in \mathrm{FO}(\varnothing) \mid \varphi \text{ ist Tautologie}\}$ aller nicht-leeren Mengen (A).

(c)* Geben Sie alle vollständigen Erweiterungen der Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\{<\})$ der dichten linearen Ordnungen an.

Hinweis: Eine Ordnung ist *dicht*, wenn für alle $a < b$ ein c existiert mit $a < c < b$. Sie können die vollständigen Erweiterungen angeben, indem Sie jeweils ein Axiomensystem dafür angeben *oder* genau beschreiben, welche Modelle die Erweiterung hat. Die Theorie der dichten linearen Ordnungen selbst wird axiomatisiert durch

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{DLO}} \coloneqq \{&\forall x(\neg x < x), \forall x\forall y\forall z((x < y \land y < z) \to x < z), && \text{„irreflexiv und transitiv“}\\ &\forall x\forall y(x < y \lor x = y \lor y < x), && \text{„alle Paare vergleichbar“}\\ &\forall x\forall y(x < y \to \exists z(x < z \land z < y))\}. && \text{„dicht“}\end{aligned}$$

Aufgabe 5* $4 + 2 + 1 = 7^*$ Punkte

Sei $\tau = \{P_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{F\}$, wobei F und alle P_i für $i \in \mathbb{N}$ einstellige Relationssymbole seien. Seien $\mathfrak{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), F^{\mathfrak{A}}, P_1^{\mathfrak{A}}, P_2^{\mathfrak{A}}, \dots)$ und $\mathfrak{B} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), F^{\mathfrak{B}}, P_1^{\mathfrak{B}}, P_2^{\mathfrak{B}}, \dots)$ zwei τ-Strukturen mit den folgenden Interpretationen der Relationssymbole:

$$\begin{aligned}F^{\mathfrak{A}} &= \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ ist endlich}\},\\ F^{\mathfrak{B}} &= \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich}\} \quad \text{und}\\ P_i^{\mathfrak{A}} = P_i^{\mathfrak{B}} &= \{A \subseteq \mathbb{N} \mid i \in A\} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle endlichen Signaturen $\sigma \subseteq \tau$ gilt: $\mathfrak{A} \restriction \sigma \cong \mathfrak{B} \restriction \sigma$.

(b) Folgern Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(c) Im Spiel $G_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat der Herausforderer eine Gewinnstrategie, zum Beispiel indem er $\varnothing$ in $\mathfrak{A}$ auswählt. Widerspricht dies zusammen mit der Aussage aus Teil (b) dem Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé? Warum (nicht)?

Aufgabe 6• keine Punkte

Zeigen Sie, dass die Klasse $\mathcal{K}$ der ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, deren Knoten alle einen endlichen Grad haben, *nicht* FO-axiomatisierbar ist. Dabei ist der *Grad* $\deg(v)$ eines Knotens $v \in V$ die Anzahl seiner direkten Nachbarn, das heißt

$$\deg(v) = |\{w \in V \mid v \text{ hat eine Kante zu } w\}| \quad \text{für } v \in V.$$

Hinweis: Nutzen Sie für Ihren Beweis die Aussage aus Aufgabe 3.