

9. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 21. Juni um 16:00 Uhr online im [Moodle-Lernraum](#).

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1

9 Punkte

Diese Aufgabe ist online im [Moodle-Lernraum](#) der Veranstaltung unter „eTest 9“ zu absolvieren.

Aufgabe 2

3 + 3 + 4 = 10 Punkte

Geben Sie an, ob die folgenden Klassen von Strukturen jeweils axiomatisierbar, endlich axiomatisierbar oder gar nicht axiomatisierbar sind. Beweisen Sie Ihre Aussagen, indem Sie entsprechende Axiomensysteme angeben, bzw. Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele auf geeigneten Strukturen spielen. Bei Klassen, die axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar sind, ist sowohl ein Axiomensystem anzugeben als auch ein Beweis, der zeigt, dass kein endliches existiert.

- (a) Die Klasse \mathcal{K}_a aller ungerichteten Graphen mit beliebig großen endlichen Cliques. Wie in Tutorium 6 sagen wir hier, dass ein Graph G beliebig große endliche Cliques enthält, wenn für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Clique der Größe mindestens n in G existiert.
- (b) Die Klasse \mathcal{K}_b aller endlichen gerichteten Graphen mit einer geraden Anzahl an Knoten.
- (c) Die Klasse \mathcal{K}_c aller gerichteten Graphen G , sodass gilt: Wenn G endlich ist, ist die Anzahl an Knoten in G gerade.

Aufgabe 3

4 Punkte

Beweisen Sie im Sequenzenkalkül, dass Funktionen immer auf dem ganzen Universum definiert sind und jedem Element ein eindeutiges Bild zuordnen. Das heißt, geben Sie eine Ableitung einer entsprechenden Sequenz im Sequenzenkalkül an, die beweist, dass der Satz

$$\forall x \exists y (fx = y \wedge \forall z (fx = z \rightarrow y = z))$$

eine Tautologie ist.

Aufgabe 4

5 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln des Sequenzenkalküls der Prädikatenlogik. Argumentieren Sie dabei *semantisch*, also insbesondere *nicht* durch Ableitungen im Sequenzenkalkül. Im folgenden ist g ein zweistelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol.

- (a)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \exists y \varphi(gxy)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi(x)}$$
- (b)
$$\frac{\Gamma, \forall x (\psi(x) \rightarrow \vartheta(x)) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \vartheta(c) \Rightarrow \Delta, \psi(c)}$$