Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

Sommersemester 2022

10. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 28. Juni um 16:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 7 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 10" zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $3 + 3 + 4 + 2^* = 10 + 2^*$ Punkte

Wir definieren $(\text{FO} + \exists^{\leq 1})$ als die Erweiterung von FO um den Quantor $\exists^{\leq 1}$ mit folgender Semantik: Für jede Formel $\psi \in (\text{FO} + \exists^{\leq 1})$ und jede zu ψ passende Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ gilt

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \exists^{\leq 1} x \psi(x)$$

genau dann, wenn höchstens ein $a \in A$ existiert, sodass $(\mathfrak{A}, \beta[x/a]) \models \psi(x)$ (insbesondere also auch, wenn kein solches $a \in A$ existiert).

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass jede Formel in $(\text{FO} + \exists^{\leq 1})$ äquivalent zu einer Formel in FO ist.

(b) Sei F ein zweistelliges Relationssymbol. Der $(\text{FO} + \exists^{\leq 1})$-Satz $\varphi := \forall x \exists^{\leq 1} y Fyx$ hat Quantorenrang 2. Zeigen Sie, dass es keinen dazu äquivalenten FO-Satz mit Quantorenrang höchstens 2 gibt.

Hinweis: Betrachten Sie das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf geeigneten Strukturen.

(c) Zeigen Sie, dass folgende Schlussregel des Sequenzenkalküls für $(\text{FO} + \exists^{\leq 1})$ korrekt ist, wenn die Konstantensymbole c und d in Γ, Δ und ψ nicht vorkommen:

$$\frac{\Gamma, \psi(c), \psi(d) \Rightarrow \Delta, c = d}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists^{\leq 1} x \psi(x)}$$

(d)* Zeigen Sie, dass die Regel nicht korrekt ist, wenn c und d in Γ, Δ und ψ vorkommen dürfen.

Aufgabe 3 — $2 + 2 + 4 + 2 = 10$ Punkte

Sei $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ eine lineare Ordnung. Wir schreiben $a \sim b$ für zwei $a, b \in A$, wenn

$$\{c \in A \mid (a < c \text{ und } c < b) \text{ oder } (b < c \text{ und } c < a)\}$$

endlich ist.

(a) Beweisen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A ist.

(b) Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in A$ mit $a \not\sim b$ gilt: Wenn $a <^{\mathfrak{A}} b$, dann gilt auch $a' <^{\mathfrak{A}} b$ für jedes a' mit $a' \sim a$, und $a <^{\mathfrak{A}} b'$ für jedes b' mit $b' \sim b$.

(c) Wir definieren $Q(\mathfrak{A}) := \big(A_{/\sim}, <^{Q(\mathfrak{A})}\big)$ wobei $A_{/\sim}$ die Menge der $\sim$-Äquivalenzklassen ist und $[a]_\sim <^{Q(\mathfrak{A})} [b]_\sim$ genau dann gelte, wenn $a' <^{\mathfrak{A}} b'$ für alle $a' \in [a]_\sim$ und alle $b' \in [b]_\sim$.

Zeigen Sie, dass $Q(\mathfrak{A})$ wieder eine lineare Ordnung ist (für jede lineare Ordnung $\mathfrak{A}$).

Hinweis: Sie können dafür die Aussage aus Teil (b) verwenden.

(d) Geben Sie zwei zueinander nicht-isomorphe Ordnungen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ an, sodass für jedes $i \in \{1, 2\}$ die Struktur $Q(\mathfrak{A}_i)$ isomorph zu $\mathfrak{A}_i$ ist.

Aufgabe 4● keine Punkte

Zu jedem nicht-leeren endlichen Wort $w = w_1 \dots w_n \in \{a, b\}^*$ definieren wir die Wortstruktur $\mathfrak{A}_w := (\{0, \dots, n-1\}, <, P_a, P_b)$ über der Signatur $\tau = \{<, P_a, P_b\}$. Hierbei ist $<^{\mathfrak{A}_w}$ die übliche Ordnung auf $\{0, \dots, n-1\}$, und $P_a^{\mathfrak{A}_w} := \{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid w_i = a\}$, $P_b^{\mathfrak{A}_w} := \{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid w_i = b\}$.

Ein FO(τ)-Satz φ definiert die Sprache $\mathcal{L}(\varphi) := \{w \in \{a, b\}^+ \mid \mathfrak{A}_w \models \varphi\}$.

(a) Geben Sie einen FO(τ)-Satz φ an mit $\mathcal{L}(\varphi) = (aba)^+ := \{(aba)^i \mid i \in \mathbb{N}, i \geq 1\}$.

(b) Nutzen Sie die Methode von Ehrenfeucht und Fraïssé, um zu zeigen, dass es eine reguläre Sprache L gibt, die von keinem FO-Satz definiert wird. D.h. es soll gelten: $L \setminus \{\varepsilon\} \neq \mathcal{L}(\varphi)$ für alle $\varphi \in$ FO(τ) (das leere Wort nehmen wir hier aus L heraus, da Universen von Strukturen nicht leer sein dürfen).