

## 12. Übungsblatt Mathematische Logik

**Abgabe:** bis Dienstag, den 12. Juli um 16:00 Uhr online im [Moodle-Lernraum](#).

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit \* markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

### Aufgabe 1

8 Punkte

Diese Aufgabe ist online im [Moodle-Lernraum](#) der Veranstaltung unter „eTest 12“ zu absolvieren.

### Aufgabe 2

12 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir nur Transitionssysteme der Form  $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$ , wobei  $E$  die (einzige) Kantenbeziehung ist und  $P, Q \subseteq V$  die atomaren Eigenschaften sind. Ist  $v \in V$ , so nennen wir  $w \in V$  einen  $P$ -Nachfolger (bzw.  $Q$ -Nachfolger) von  $v$ , wenn  $(v, w) \in E$  und  $w \in P$  (bzw.  $w \in Q$ ).

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Transitionssystemen mit ausgewählten Knoten  $v$  in der Modallogik definierbar sind.

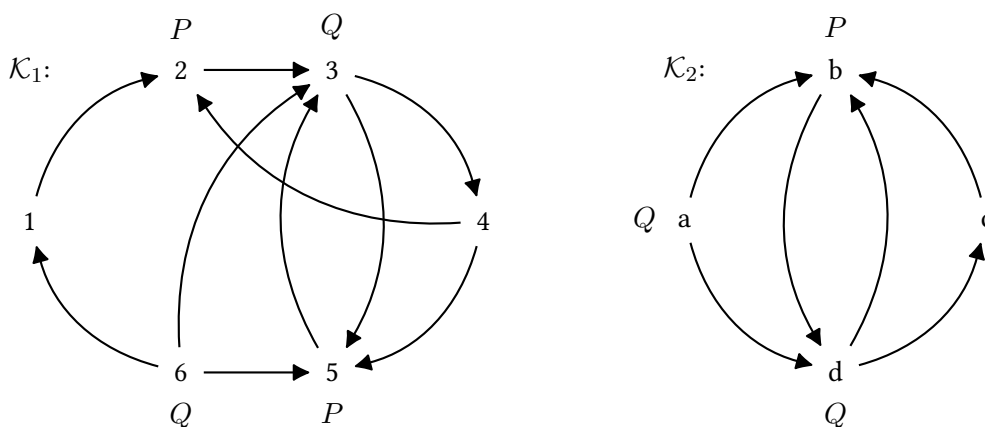
- (a)  $v$  hat mindestens zwei verschiedene  $Q$ -Nachfolger, die jeweils mind. einen  $P$ -Nachfolger haben.
- (b) Jeder  $P$ -Nachfolger von  $v$  besitzt keinen  $Q$ -Nachfolger.
- (c) Der Knoten  $v$  hat entweder keine Nachfolger oder es gibt einen Pfad von  $v$  zu sich selbst, der nur Knoten in  $P$  besucht.
- (d) Es gibt einen von  $v$  aus erreichbarer Knoten, der eine Selbstkante hat.
- (e) Von  $v$  geht kein Pfad der Länge 4, aber ein Pfad der Länge 3 aus.

*Hinweis:* Auf einem Pfad dürfen Wiederholungen von Knoten auftreten.

### Aufgabe 3

5 Punkte

Geben Sie die maximale Bisimulation  $Z$  zwischen  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  an. Begründen Sie für alle  $(v, w) \notin Z$ , dass diese nicht Teil der Bisimulation sind.



**Aufgabe 4**

4 Punkte

Seien  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  zwei Kripkestrukturen. Zeigen Sie, dass es eine bzgl.  $\subseteq$  *maximale* Bisimulation  $Z$  zwischen  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  gibt, d.h. sodass für alle Bisimulationen  $Z'$  zwischen den beiden Strukturen gilt:  $Z' \subseteq Z$ .

**Aufgabe 5**

keine Punkte

Wir betrachten die ML-Formel

$$\psi := \neg Q \wedge \diamond \diamond \diamond \diamond Q \in \text{ML}.$$

- (a) Geben Sie ein Modell  $\mathcal{K}, v$  von  $\psi$  mit möglichst wenigen Zuständen an und begründen Sie, warum es kein Modell mit weniger Zuständen gibt.
- (b) Geben Sie nun ein Baummodell  $\mathcal{T}, v$  von  $\psi$  mit möglichst wenigen Zuständen an.
- (c) Geben Sie eine ML-Formel  $\varphi$  an, sodass  $\diamond \varphi$  ein Baummodell  $\mathcal{T}, v$  mit minimaler Anzahl an Zuständen besitzt. Das bedeutet, es darf *überhaupt kein* Modell (ungeachtet ob Baum oder nicht)  $\mathcal{K}, w$  von  $\diamond \varphi$  mit weniger Zuständen als  $\mathcal{T}$  geben.