

**Aufgabe 1**

Wir betrachten die Struktur  $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, +, -, 0)$ .

- (a) Geben Sie für zwei Zahlen  $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  die kleinste Substruktur von  $\mathfrak{A}$  an, die  $\{m, n\}$  enthält. Ist dies eine echte Substruktur?
- (b) Was drücken die folgenden FO-Formeln auf  $\mathfrak{A}$  aus? Geben Sie eine möglichst geschickte Beschreibung in Worten an. Achten Sie dabei auf freie Variablen.
- (i)  $\psi := \forall x \exists y (x + y = 0)$
- (ii)  $\varphi(x) := \exists y (x = y + y + y)$
- (c) Geben Sie alle Redukte von  $\mathfrak{A}$  an. Auf welchen dieser Redukte können Sie eine FO-Formel aufstellen, die das Element 0 „beschreibt“? Überlegen Sie sich zunächst eine sinnvolle Definition des Begriffs „beschreiben“.

**Aufgabe 2**

Wir betrachten die Struktur  $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ . Geben Sie FO( $\{+, \cdot, 0, 1\}$ )-Formeln an, die die folgenden Sachverhalte auf  $\mathfrak{N}$  beschreiben. Achten Sie dabei besonders auf die freien Variablen in Ihren Formeln. Erklären Sie kurz die Idee jeder Formel.

- (a)  $a \mid b$  (d.h.  $a$  teilt  $b$ )
- (b)  $a < b$