

Aufgabe 1

Sei $\mathfrak{A} := (A = \{3, 4\}, R, <)$ mit der einstelligigen Relationen $R^{\mathfrak{A}} := \{4\}$ und der üblichen Ordnung $<$ auf $\{3, 4\}$. Betrachten Sie den Satz

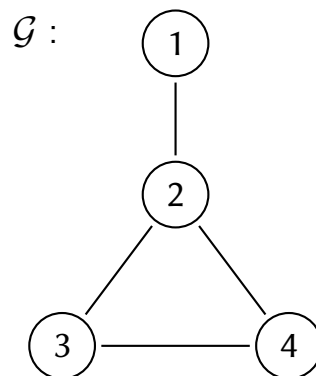
$$\psi := \forall x(Rx \rightarrow \exists y(x < y \wedge Ry)) \in \text{FO}(\{R, <\}).$$

- (a) Geben Sie das Auswertungsspiel $\text{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ an und bestimmen Sie die Gewinnregionen W_σ der beiden Spieler $\sigma \in \{0, 1\}$.
- (b) Beantworten Sie, ob $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt oder nicht, indem Sie eine Gewinnstrategie für einen der Spieler im Auswertungsspiel $\text{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ angeben. Ist das die einzige mögliche Gewinnstrategie?

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die angegebene Funktion oder Relation in der gegebenen Struktur elementar definierbar ist.

- (a) $\{0, 2, 4\}$ in $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.
- (b) $\{2, 4\}$ in folgendem ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (\{1, 2, 3, 4\}, E)$:



- (c) $\{0, 2, 4\}$ in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$.
- (d) (optional:) $\{q\}$ in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ für beliebiges, festes $q \in \mathbb{Q}$.