Aufgabe 1

Sei $\tau = \{P, R, f, c, d\}$, wobei P ein einstelliges und R ein zweistelliges Relationssymbol, f ein zweistelliges Funktionssymbol und c und d Konstantensymbole seien.

Wir betrachten die folgende Menge von atomaren Sätzen

$$\Sigma := \{Rt(ftd) \mid t \text{ ein Grundterm mit Signatur } \tau\} \cup \{Pfcd, Pf(fcd)(fcd), Pc\}$$

(a) Geben Sie eine Herbrandstruktur $\mathfrak{H}$ zur Signatur τ an, die ein Modell von Σ ist.

(b) Sind alle Herbrandstrukturen über τ Modelle von Σ?

(c) Sei nun $\Sigma' := \Sigma \cup \{c = d\}$. Gilt $\mathfrak{H} \models \Sigma'$?

Aufgabe 2

Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (mit Addition und Multiplikation wie üblich). Für jede Zahl $q \in \mathbb{N}$ mit $q > 0$ definieren wir die Relation $\sim_q$ auf $\mathbb{Z}$ wie folgt:

Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gelte $a \sim_q b$ genau dann wenn es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $|a - b| = z \cdot q$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim_q$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist (für jedes $q > 0$).

(b) Zeigen Sie, dass $\sim_q$ auch eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$ ist.

(c) Wie sehen die Faktorstrukturen $\mathfrak{A}/{\sim_q}$, abhängig von q, aus? Zu welcher Struktur sind sie jeweils isomorph?