Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

Sommersemester 2023

2. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 25. April um 18:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung) — 10 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 2" zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $2 + 4 = 6$ Punkte

Eine Boolesche Funktion $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ist *selbstdual*, wenn

$$\neg f(a_1, \dots, a_n) = f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$$

für alle $a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}$ gilt. Dabei ist $\neg\colon \{0,1\} \to \{0,1\}, x \mapsto (1-x)$ die Negationsfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass die Verkettung selbstdualer Boolescher Funktionen wieder selbstdual ist, also dass die Funktion $h\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ mit

$$h(x_1, \dots, x_n) := g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \quad \text{für alle } (x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$$

selbstdual ist, wenn die Funktionen $g\colon \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ und $f_1, \dots, f_m\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ alle selbstdual sind.

(b) Sind die folgenden Mengen funktional vollständig? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(i) $\{\neg, \mathsf{majority}\}$, wobei $\mathsf{majority}\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ definiert ist mit

$$\mathsf{majority}(x_1, x_2, x_3) = 1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad |\{i \in \{1,2,3\} \mid x_i = 1\}| \geq 2.$$

(ii) $\{\not\to, 1\}$, wobei $\not\to$ analog zu Blatt 1 definiert ist als

$$\not\to\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}, \quad x \not\to y := \min\{x, 1-y\}, \quad \text{also } x \not\to y = \neg(x \to y).$$

Aufgabe 3 — $6 + 3 = 9$ Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Formeln äquivalent zu einer Horn-Formel sind.

(i) $\varphi_i := (A \leftrightarrow B) \oplus C$

(ii) $\varphi_{ii} := (A \to B) \lor (\neg D \land \neg E \land (\neg A \lor B) \land (C \lor E \lor F))$

(iii) $\varphi_{iii} := (A \lor B \lor C \lor D \lor E \lor F) \land ((B \oplus C) \leftrightarrow (D \oplus E)) \land (B \to D)$

Hinweis: Nutzen Sie bei Bedarf die Ergebnisse und Methoden aus Tutoriumsaufgabe 2.

(b) Wir betrachten die folgenden drei Interpretationen.

$$\mathfrak{I}_{1110}\colon A \mapsto 1, B \mapsto 1, C \mapsto 1, D \mapsto 0$$
$$\mathfrak{I}_{0111}\colon A \mapsto 0, B \mapsto 1, C \mapsto 1, D \mapsto 1$$
$$\mathfrak{I}_{0101}\colon A \mapsto 0, B \mapsto 1, C \mapsto 0, D \mapsto 1$$

Geben Sie eine Horn-Formel $\varphi(A, B, C, D)$ an, sodass die drei angegebenen Interpretationen φ erfüllen, aber φ möglichst wenige Modelle über den Variablen $\tau = \{A, B, C, D\}$ hat. Wieviele Modelle über τ hat Ihre Formel insgesamt? Begründen Sie, warum keine Horn-Formel weniger Modelle über τ haben kann.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst, welche Modelle Ihre Formel mindestens haben muss und konstruieren Sie danach eine geeignete Horn-Formel.

Aufgabe 4 5 Punkte

Gegeben sei die Formel

$$\psi := (T \wedge \neg S) \vee (Q \wedge S \wedge \neg P) \vee \neg U \vee (U \wedge T \wedge \neg Q)$$
$$\vee (S \wedge U \wedge T \wedge \neg P) \vee (U \wedge \neg T) \vee (U \wedge P) \vee (T \wedge R).$$

Verwenden Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, um zu beantworten, ob ψ eine Tautologie ist. Geben Sie dabei für jeden Schritt die Menge der markierten Variablen an.

Aufgabe 5$^\bullet$ keine Punkte

Seien $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathrm{AL}$ und $\Phi, \Psi, \Theta, \Phi_0, \Phi_1, \ldots \subseteq \mathrm{AL}$ aussagenlogische Formeln bzw. Formelmengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Wenn $\Phi \models \vartheta$, dann gilt $\Psi \models \vartheta$

(i) für alle $\Psi \subseteq \Phi$ beziehungsweise

(ii) für alle $\Psi \supseteq \Phi$.

(b) Es gilt $\Phi \models \psi$ oder $\Phi \models \neg\psi$.

(c) Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \vartheta$, dann gilt $\varphi \models \vartheta$.

(d) Wenn $\Phi \models \psi$ und $\Theta \models \psi$, dann gilt $(\Phi \cap \Theta) \models \psi$.

(e) Wenn $\Phi_0 \supseteq \Phi_1 \supseteq \ldots$ und $\Phi_i \models \psi$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann gilt $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i \models \psi$.

Aufgabe 6* $3 + 3 = 6^*$ Punkte

Eine zweistellige Boolesche Funktion $f\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ ist *symmetrisch*, wenn $f(x,y) = f(y,x)$ für alle $x, y \in \{0,1\}$ und *echt zweistellig*, wenn keines der Argument weggelassen werden kann, d.h., wenn es keine einstellige Boolesche Funktion $g\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$ gibt, sodass $f(x,y) = g(x)$ für alle $x, y \in \{0,1\}$ oder $f(x,y) = g(y)$ für alle $x, y \in \{0,1\}$. Beispielsweise sind die Nullfunktion $f(x,y) = 0$ und die Negation von x, $f(x,y) = 1 - x$, *nicht* echt zweistellig.

(a) Zeigen Sie: Wenn f, g, h drei paarweise verschiedene, symmetrische, echt zweistellige Boolesche Funktionen sind, dann ist $\{0, 1, f, g, h\}$ funktional vollständig.

(b) Geben Sie zwei verschiedene, symmetrische, echt zweistellige Boolesche Funktionen f und g an, sodass $\{0, 1, f, g\}$ *nicht* funktional vollständig ist und $\{0, 1, f, g\}$ nicht $\{0, 1, \vee, \wedge\}$ aus dem Tutorium entspricht, also nicht $f = \vee$ und $g = \wedge$ oder andersherum.

Begründen Sie, dass $\{0, 1, f, g\}$ nicht funktional vollständig ist, indem Sie präzise eine Eigenschaft definieren, die im Sinne von Aufgabe 2 (a) bzw. Aufgabe 1 (a) aus dem Tutorium unter Verkettung abgeschlossen ist und von allen aus $\{0, 1, f, g\}$ gebildeten Funktionen erfüllt wird, aber nicht von allen Booleschen Funktionen erfüllt wird.

Hinweis: Bitte beschreiben Sie nur die Eigenschaft, Sie müssen danach nichts dazu beweisen. Insbesondere müssen Sie weder beweisen, dass die Eigenschaft tatsächlich unter Verkettung abgeschlossen ist, noch dass die von Ihnen angegebenen Funktionen die Eigenschaft erfüllen, noch dass es Boolesche Funktionen gibt, die die Eigenschaft nicht erfüllen.