Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

Sommersemester 2023

4. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 9. Mai um 18:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung) — 10 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 4" zu absolvieren.

Aufgabe 2 — 8 Punkte

Nutzen Sie den Sequenzenkalkül der Aussagenlogik, um die folgenden Probleme zu lösen. Stellen Sie zunächst jeweils eine geeignete Sequenz auf und konstruieren Sie dann einen Beweis oder finden Sie eine falsifizierende Interpretation im Sequenzenkalkül. Falls der Sequenzenkalkül eine falsifizierende Interpretation für Ihre Sequenz liefert, erklären Sie kurz, was die Bedeutung der falsifizierenden Interpretation im Bezug auf die jeweilige Fragestellung ist.

(a) Gilt die semantische Folgerungsbeziehung $\underbrace{\{A \to B, B \to C\}}_{=:\Phi_a} \models \underbrace{A \to C}_{=:\psi_a}$?

(b) Ist die Formel $\varphi_b := \neg Y \lor (X \to \neg X) \lor (X \land Y)$ eine Tautologie?

(c) Ist die Formel $\varphi_c := (Q \lor (R \land (S \to T) \land (\neg R \lor (S \land \neg T)))) \land \neg P$ erfüllbar?

Aufgabe 3 — 5 Punkte

Eine Schlussregel heißt korrekt, wenn aus der Gültigkeit der Prämissen die Gültigkeit der Konklusion folgt. Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln. Argumentieren Sie dabei semantisch, d.h. *nicht* mittels Ableitungen im Sequenzenkalkül. Wie auf Blatt 1 ist $\not\to$ definiert durch $[\![\varphi \not\to \psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ genau dann, wenn $[\![\varphi \to \psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 0$.

(a)
$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \vartheta \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}$$

(b)
$$\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \not\to \psi}$$

Aufgabe 4 — $1 + 1 + 5 = 7$ Punkte

Seien $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$ zwei unendliche aussagenlogische Formelmengen. Wir sagen „Γ impliziert, dass mindestens eine Formel aus Δ erfüllt wird", kurz $\Gamma \models_{\geq 1} \Delta$, wenn jede zu $\Gamma \cup \Delta$ passende Interpretation $\mathfrak{I}$, die Γ erfüllt, auch mindestens eine Formel $\delta \in \Delta$ erfüllt.

Wir wollen nun den Sequenzenkalkül nutzen, um Beweise für $\Gamma \models_{\geq 1} \Delta$ aufzustellen. Da Sequenzen endlich sein müssen, aber Γ und Δ unendlich sind, können wir *nicht* aus den ganzen Mengen Γ, Δ eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ aufstellen und im Sequenzenkalkül beweisen.

(a) Wie müssten Beweise für $\Gamma \models_{\geq 1} \Delta$ stattdessen aussehen? Überlegen Sie, welche Sequenzen man sinnvoll aufstellen kann, um $\Gamma \models_{\geq 1} \Delta$ zu beweisen.

(b) Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Beweise aus (a), d.h.: Wenn ein Beweis für $\Gamma \models_{\geq 1} \Delta$ wie in (a) beschrieben existiert, dann gilt tatsächlich $\Gamma \models_{\geq 1} \Delta$.

(c) Zeigen Sie nun auch die Vollständigkeit für Ihre Beweise, d.h.: Wenn $\Gamma \models_{\geq 1} \Delta$ gilt, dann gibt es auch einen Beweis dafür wie in (a) beschrieben.

Aufgabe 5$^\bullet$ keine Punkte

Der Junktor $\leftrightarrow$ ist definiert durch $[\![\psi \leftrightarrow \vartheta]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ genau dann, wenn $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\vartheta]\!]^{\mathfrak{I}}$.

Geben Sie möglichst einfache und sinnvolle Schlussregeln ($\leftrightarrow \Rightarrow$) und ($\Rightarrow \leftrightarrow$) an, die die Einführung von $\leftrightarrow$ auf der linken bzw. rechten Seite der Konklusion erlauben. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schlussregeln und beweisen Sie zusätzlich, dass bei Ihren zwei Schlussregeln jeweils aus der Korrektheit der Konklusion auch die Korrektheit der Prämissen folgt.