

## 5. Übungsblatt Mathematische Logik

**Abgabe:** bis Dienstag, den 16. Mai um 18:00 Uhr online im [Moodle-Lernraum](#).

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit \* markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

### Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung)

15 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im [Moodle-Lernraum](#) der Veranstaltung unter „eTest 5“ zu absolvieren.

### Aufgabe 2

5 Punkte

Wir definieren auf der Menge der ganzen Zahlen die Vorgängerfunktion  $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  und die Nachfolgerfunktion  $s: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit

$$p(z) = z - 1 \quad \text{und} \\ s(z) = z + 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{Z}.$$

Geben Sie für jede der folgenden Strukturen jeweils alle möglichen Substrukturen an und begründen Sie jeweils kurz, warum es keine weiteren Substrukturen gibt.

- (a)  $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, p, s)$
- (b)  $\mathfrak{B} := (\mathbb{Z}, s)$
- (c)  $\mathfrak{C} := (\mathbb{Z})$

### Aufgabe 3

5 + 2 = 7 Punkte

Ein *ungerichteter Graph mit Markierungen* ist eine Struktur  $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}}, M^{\mathcal{G}})$ , wobei  $E^{\mathcal{G}} \subseteq V \times V$  wie in der Vorlesung definiert eine symmetrische Kantenrelation ohne Schlingen ist und  $M^{\mathcal{G}} \subseteq V$  eine Menge von markierten Knoten ist. Wenn  $v \in M^{\mathcal{G}}$ , dann sagen wir, dass  $v$  *markiert* ist, ansonsten ist  $v \notin M^{\mathcal{G}}$  und wir nennen  $v$  *unmarkiert*.

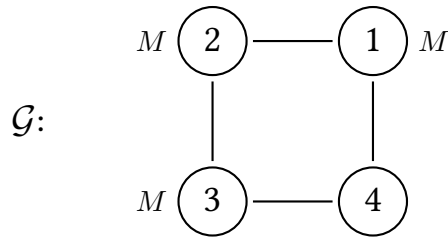
- (a) Beschreiben Sie jeweils in Worten, welche Eigenschaften die folgenden FO-Sätze auf ungerichteten Graphen  $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}}, M^{\mathcal{G}})$  mit Markierungen ausdrücken. Geben Sie dabei *nicht* den FO-Satz „wörtlich“ wieder, sondern nutzen Sie möglichst geschickte Formulierungen und Begriffe der Graphentheorie, wie zum Beispiel „markierter Knoten“, „Kante“, „Nachbar“, „verbunden“, ...

*Beispiel:* Die Formel  $\exists x \exists y Exy$  drückt aus, dass  $\mathcal{G}$  mindestens eine Kante enthält.

- (i)  $\psi_i := \neg \exists x (\neg Mx)$
- (ii)  $\psi_{ii} := \exists x \exists y (Exy \wedge Mx \wedge My)$
- (iii)  $\psi_{iii} := \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge Mx \wedge My \wedge Mz)$
- (iv)  $\psi_{iv} := \forall x \forall y ((Mx \wedge My) \rightarrow Exy)$

(v)  $\psi_v := \exists x(\neg Mx \wedge \forall y(Exy \rightarrow My))$

- (b) Geben Sie für folgenden Graphen  $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}}, M^{\mathcal{G}})$  mit kurzer Begründung an, welche der Formeln aus (a) durch  $\mathcal{G}$  erfüllt werden. Die markierten Knoten sind mit einem  $M$  gekennzeichnet.



#### Aufgabe 4

8 Punkte

Wir betrachten die Struktur  $\mathfrak{A} := (\mathbb{R}_{\geq 0}, +, f^{\mathfrak{A}})$ , wobei  $+$  die übliche Addition ist und  $f^{\mathfrak{A}}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definiert ist durch  $f^{\mathfrak{A}}(r) := \lfloor r \rfloor$  für alle  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $f^{\mathfrak{A}}$  rundet also auf die nächste ganze Zahl ab, es gilt zum Beispiel  $f^{\mathfrak{A}}(2,9) = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$ .

Geben Sie jeweils  $\text{FO}(\{+, f\})$ -Formeln an, die die folgenden Sachverhalte in der Struktur  $\mathfrak{A}$  beschreiben. Achten Sie dabei auf die freien Variablen und erklären Sie jeweils kurz die Idee Ihrer Formeln.

*Hinweis:* Sie dürfen Hilfsformeln definieren und Formeln aus *vorherigen* Teilaufgaben verwenden, auch wenn Sie die entsprechende Teilaufgabe nicht bearbeitet haben.

- (a)  $a = 0$
- (b)  $a < b$
- (c)  $a$  ist keine natürliche Zahl, also  $a \notin \mathbb{N}$  (die 0 zählen wir zu den natürlichen Zahlen)
- (d)  $a = 1$
- (e)  $c = \max\{a - b, 0\}$

#### Aufgabe 5

keine Punkte

Seien  $\mathfrak{A} = (A, \tau)$  und  $\mathfrak{B} = (B, \tau)$  zwei  $\tau$ -Strukturen mit  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ .

- (a) Zeigen Sie per Induktion über den Termaufbau, dass für jeden Term  $t$  und jede Variablenbelegung  $\beta: \text{var}(t) \rightarrow A$  folgendes gilt.

$$\llbracket t \rrbracket^{\mathfrak{A}, \beta} = \llbracket t \rrbracket^{\mathfrak{B}, \beta}$$

- (b) Zeigen Sie mithilfe von (a) per Induktion über den Formelaufbau, dass für jede quantorenfreie Formel  $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \text{FO}(\tau)$  und alle  $a_1, \dots, a_n \in A$  folgendes gilt.

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

- (c) Ein Satz  $\psi \in \text{FO}(\tau)$  heißt *universell*, wenn  $\psi$  die Gestalt  $\psi = \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$  hat, wobei  $\varphi$  eine quantorenfreie Formel ist. Nutzen Sie (b), um zu zeigen, dass universelle Sätze unter Substrukturen abgeschlossen sind, das heißt, wenn  $\mathfrak{B} \models \psi$ , dann auch  $\mathfrak{A} \models \psi$  für alle  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ . Geben Sie weiter ein Gegenbeispiel an, das zeigt, dass dieser Zusammenhang nicht immer gilt, wenn  $\psi$  *nicht* universell ist.