Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

Sommersemester 2023

7. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den **6. Juni (nicht am 30. Mai!)** um 18:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

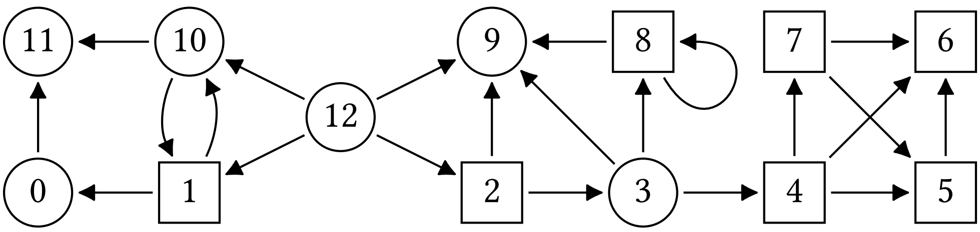
Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung) 15 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 7" zu absolvieren.

Aufgabe 2 $5 + 4^*$ Punkte

Wir betrachten den folgenden Spielgraphen $\mathcal{G} = (V = V_0 \mathbin{\dot\cup} V_1, E)$. Dabei sind die umkreisten Knoten ○ in V_0 (dort ist Spieler 0 am Zug) und die anderen Knoten □ in V_1 (dort ist Spieler 1 am Zug).



(a) Bestimmen Sie die Gewinnregionen W_0 und W_1 von Spieler 0 und 1 in $\mathcal{G}$ mit der Methode aus der Vorlesung. Geben Sie dabei auch den Rechenweg, also die Zwischenschritte W_0^i und W_1^i, an.

(b) Ist $\mathcal{G}$ fundiert? Ist $\mathcal{G}$ determiniert? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

(c)* Sei $\mathcal{G}_f = (V = V_0 \mathbin{\dot\cup} V_1, E)$ nun der Spielgraph eines beliebigen, fundierten Spiels mit $V \neq \varnothing$.

Ist es *immer* möglich, eine einzige Kante zu $\mathcal{G}_f$ hinzuzufügen, sodass das Spiel *nicht* mehr fundiert ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d)* Geben Sie einen Spielgraphen $\mathcal{G}_f = (V = V_0 \mathbin{\dot\cup} V_1, E)$ zu einem fundierten Spiel und eine Kante $e \in E$ an, sodass $\mathcal{G}_f$ *nicht* mehr fundiert ist, wenn man e entfernt, oder begründen Sie, warum das nicht möglich ist.

(e)* Geben Sie nun einen Spielgraphen $\mathcal{G}_d = (V = V_0 \mathbin{\dot\cup} V_1, E)$ für ein determiniertes Spiel an, sodass folgendes gilt: Es ist einerseits möglich, eine einzige Kante $e \in E$ zu entfernen, sodass $\mathcal{G}_d$ nicht mehr determiniert ist, und andererseits ist es auch möglich, eine einzige Kante zu $\mathcal{G}_d$ hinzuzufügen, sodass $\mathcal{G}_d$ nicht mehr determiniert ist. Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie insbesondere jeweils die entsprechende Kante an, die entfernt oder hinzugefügt werden muss, um die Determiniertheit zu brechen.

Aufgabe 3 4 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (A = \{1, 2\}, P, R)$ mit der einstelligen Relation $P^{\mathfrak{A}} := \{1, 2\}$ und der zweistelligen Relation $R^{\mathfrak{A}} := \{1\} \times \{1, 2\}$. Betrachten Sie den Satz

$$\psi := \exists x(\forall y(Rxy \to \neg Py) \land Px) \quad \in \mathrm{FO}(\{P, R\}).$$

Geben Sie das Auswertungsspiel $\mathsf{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ an und beantworten Sie, ob $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt oder nicht, indem Sie eine Gewinnstrategie für einen der Spieler im Auswertungsspiel $\mathsf{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ angeben.

Aufgabe 4 11 Punkte

Geben Sie jeweils eine FO-Formel an, die die angegebene Konstante, Funktion oder Relation in der gegebenen Struktur definiert, oder geben Sie einen Automorphismus an, der die elementare Definierbarkeit widerlegt. Erklären Sie jeweils kurz die Idee Ihrer Formeln oder Automorphismen und erklären Sie für Ihre Automorphismen insbesondere, warum sie nicht mit der gegebenen Konstante, Funktion oder Relation verträglich sind.

(a) die Funktion $z \mapsto -z$ in $(\mathbb{Z}, +)$

(b) die Menge $\mathbb{N}$ in $(\mathbb{R}, \cdot, 0, 1)$

(c) die Menge $\{-1, 1\}$ in $(\mathbb{Z}, \cdot)$

(d) die Konstante 2 in $(\mathbb{Q}, 0, 1, <)$

(e) die Teilbarkeitsrelation $\mid$ in $(\mathbb{N}, \mathbb{P})$

Begriffserklärungen: $\mathbb{P}$ ist die Menge der Primzahlen als einstellige Relation und die Teilbarkeitsrelation ist $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{es gibt ein } c \in \mathbb{N} \text{ mit } a \cdot c = b\}$, man schreibt $a \mid b$ für „a teilt b“.

Aufgabe 5* 6* Punkte

Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ betrachten wir die Struktur $\mathfrak{B}_n := (\{a, b\}^n, 0^{\mathfrak{B}_n}, E^{\mathfrak{B}_n})$, wobei $\{a, b\}^n$ die Menge aller Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{a, b\}$ bezeichnet, die Konstante $0^{\mathfrak{B}_n} := a^n$ das Wort aus n as ist und $E^{\mathfrak{B}_n} := \{(w_1, w_2) \mid d(w_1, w_2) = 1\}$, wobei $d(w_1, w_2)$ die Hamming-Distanz zwischen w_1 und w_2 bezeichnet, also die Anzahl der Positionen, an denen w_1 und w_2 sich unterscheiden.

Ziel ist es, die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{B}_n)$ von $\mathfrak{B}_n$ zu beschreiben. Finden Sie dazu eine geeignete, „bekannte“ Gruppe $\mathfrak{A}_n = (A_n, \circ)$ und beweisen Sie, dass $\mathrm{Aut}(\mathfrak{B}_n) \cong \mathfrak{A}_n$, indem Sie einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Aut}(\mathfrak{B}_n)$ und $\mathfrak{A}_n$ angeben und beweisen, dass es sich tatsächlich um einen Isomorphismus handelt.

Hinweis: Sie können zuerst überlegen, welche Automorphismen es auf $\mathfrak{B}_n$ gibt und warum es keine weiteren geben kann. Betrachten Sie dazu zunächst die $E^{\mathfrak{B}_n}$-Nachbarn von $0^{\mathfrak{B}_n}$ und überlegen Sie, wie ein Automorphismus π auf $\mathfrak{B}_n$ diese Elemente behandeln muss.

Aufgabe 6• keine Punkte

Beweisen Sie, dass jedes fundierte Spiel $\mathcal{G} = (V = V_0 \dot\cup V_1, E)$ determiniert ist, sogar, wenn der Spielgraph unendlich ist, also wenn V unendlich viele Elemente enthalten darf.