Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

Sommersemester 2023

8. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 13. Juni um 18:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung) 15 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 8" zu absolvieren.

Aufgabe 2 6 Punkte

Eine *vollständige Erweiterung* $T' \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ einer Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ist eine vollständige Theorie, die T enthält, das heißt, T' ist vollständig und $T \subseteq T'$.

Sind die folgenden Theorien vollständig? Beweisen Sie jeweils, dass die Theorie vollständig ist, oder widerlegen Sie die Vollständigkeit der Theorie, indem Sie zwei verschiedene vollständige Erweiterungen angeben.

(a) die Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\{+, \cdot, 0, 1\})$ der zu $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ isomorphen Strukturen

(b) die Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\{+, \cdot, 0, 1\})$ der endlichen Körper

(c) die Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\{<\})$ der diskreten linearen Ordnungen

Begriffserklärung: In einer *diskreten* linearen Ordnung muss jedes nicht-maximale Element einen direkten Nachfolger haben und jedes nicht-minimale Element einen direkten Vorgänger. Dabei ist ein direkter Nachfolger eines Elements a ein Element b mit $a < b$, sodass kein c mit $a < c < b$ existiert. Direkte Vorgänger sind analog definiert.

(d) die Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\{E\})$ der ungerichteten Graphen mit genau einem Knoten

(e) die Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\{E\})$ der unendlichen ungerichteten Graphen ohne Kanten

Aufgabe 3 14 Punkte

Finden Sie für die folgenden Paare von Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, sodass $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$, oder beweisen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Beweisen Sie im ersten Fall auch, dass $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$, indem Sie einen trennenden FO-Satz ψ vom Quantorenrang m angeben und zeigen Sie die Minimalität von m, indem Sie eine Gewinnstrategie der Duplikatorin im Ehrenfeucht–Fraïssé-Spiel $\mathcal{G}_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ angeben.

Erklären Sie jeweils die Idee der angegebenen Sätze und begründen Sie für Ihre Gewinnstrategien kurz, warum die Strategien funktionieren.

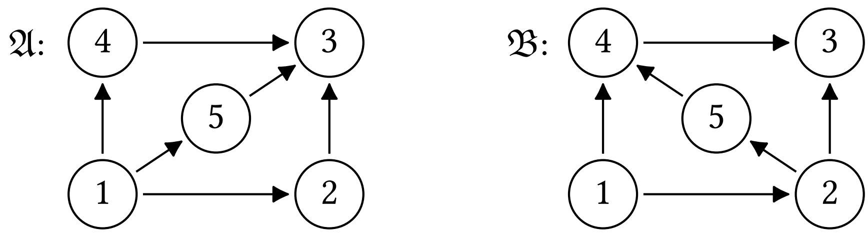
(a) $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, M^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}, M^{\mathfrak{B}})$

Dabei ist $M^{\mathfrak{A}} = \{(n_1, n_2, n_1 \cdot n_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$ und $M^{\mathfrak{B}} = \{(z_1, z_2, z_1 \cdot z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$ jeweils der Graph der Multiplikation.

(b) $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, O^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (\mathcal{P}(\mathbb{R}), O^{\mathfrak{B}})$

Dabei ist $O^{\mathfrak{A}} = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1 < r_2\}$ die übliche Ordnung auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{S \mid S \subseteq \mathbb{R}\}$ ist die Potenzmenge von $\mathbb{R}$, also die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, und $O^{\mathfrak{B}}$ ist die echte Teilmengenbeziehung, also $O^{\mathfrak{B}} = \{(S_1, S_2) \mid S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}, S_1 \subsetneq S_2\}$.

(c) die folgenden gerichteten Graphen $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, E^{\mathfrak{B}})$:



(d) $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, P^{\mathfrak{B}}, Q^{\mathfrak{B}})$

Dabei ist $P^{\mathfrak{A}} = 2\mathbb{N} + 1 = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen, $P^{\mathfrak{B}} = \{r \in \mathbb{R} \mid \lfloor r \rfloor \in (2\mathbb{N} + 1)\}$, $Q^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}_{\geq 10}$ und $Q^{\mathfrak{B}} = \mathbb{R}_{\geq 10}$.

(e) $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, A^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (\Sigma^*, A^{\mathfrak{B}})$ mit $\Sigma = \{a, b\}$

Dabei ist $A^{\mathfrak{A}} = \{(n_1, n_2, n_1 + n_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$ der Graph der Addition, Σ^* ist die Menge der endlichen Wörter über dem Alphabet Σ, und $A^{\mathfrak{B}} = \{(u, v, uv) \mid u, v \in \Sigma^*\}$ ist der Graph der Konkatenation. Auch das leere Wort ε ist in Σ^* enthalten.

(f) $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, A^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (\Sigma^*, A^{\mathfrak{B}})$ mit $\Sigma = \{a\}$ und ansonsten analog wie oben definiert

Aufgabe 4$^\bullet$ keine Punkte

Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Theorie.

(a) Zeigen Sie, dass T genau dann vollständig ist, wenn $T = \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ für eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass jede Theorie T mindestens eine vollständige Erweiterung besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass jede Theorie T, die *nicht* vollständig ist, mindestens zwei verschiedene vollständige Erweiterungen besitzt.

(d) Geben Sie eine Theorie an, die

  (i) genau zwei verschiedene vollständige Erweiterungen besitzt bzw.

  (ii) unendlich viele verschiedene vollständige Erweiterungen besitzt.