Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

Sommersemester 2023

9. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 20. Juni um 18:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung) 15 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 9“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 6 Punkte

Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von τ-Strukturen. Falls es Folgen $(\mathfrak{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\mathfrak{B}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass für alle m $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$ und die Duplikatorin eine Gewinnstrategie im EF-Spiel $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$ hat, dann folgt aus den Resultaten der Vorlesung, dass $\mathcal{K}$ *nicht* endlich axiomatisierbar sein kann. Findet man anstatt der Folgen sogar jeweils eine feste Struktur, also $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$ und die Duplikatorin hat eine Gewinnstrategie in $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für alle m, dann folgt sogar, dass $\mathcal{K}$ gar nicht FO-axiomatisierbar ist. Betrachten Sie nun jeweils die folgenden beiden Situationen.

(a) Es gibt ein festes $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und eine Folge $(\mathfrak{B}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, sodass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:
$\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$ und die Duplikatorin hat eine Gewinnstrategie im EF-Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_m)$.

(b) Es gibt eine Folge $(\mathfrak{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und ein festes $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$, sodass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:
$\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ und die Duplikatorin hat eine Gewinnstrategie im EF-Spiel $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B})$.

Es ist klar, dass in beiden Situationen folgt, dass $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatisierbar ist. Beantworten Sie jeweils, ob sie auch folgern können, dass $\mathcal{K}$ gar nicht FO-axiomatisierbar ist. Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptungen oder geben Sie geeignete Gegenbeispiele an. Falls Sie ein Gegenbeispiel angeben, sollten Sie eine Klasse $\mathcal{K}$ und ein dazugehöriges Axiomensystem angeben, sowie die entsprechenden Strukturen mit Gewinnstrategien der Duplikatorin angeben.

Aufgabe 3 6 Punkte

Beweisen Sie mithilfe der Aussagen aus Aufgabe 2, dass die Klasse $\mathcal{K}$ der ungerichteten Graphen, die *nicht* für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$ einen Kreis der Länge n enthalten, gar nicht FO-axiomatisierbar ist.

Hinweis: In der Vorlesung wurde bewiesen, dass transitive Hüllen nicht FO-definierbar sind. Sie können in Ihrem Beweis für Ihre Gewinnstrategie der Duplikatorin an einigen Stellen ähnliche Methoden nutzen und auf die entsprechenden Argumente aus der Vorlesung verweisen.

Aufgabe 4 3 Punkte

Seien f und g jeweils einstellige Funktionssymbole. Die prädikatenlogische Sequenz

$$\forall x(fgx = x) \Rightarrow \forall y\exists x(fx = y)$$

drückt aus, dass f surjektiv ist, wenn g eine Rechtsinverse zu f ist. Geben Sie einen Beweis im Sequenzenkalkül für diese Sequenz an.

Aufgabe 5 5 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Korrektheit der folgenden prädikatenlogischen Schlussregeln. Argumentieren Sie dabei *semantisch*, also insbesondere *nicht* durch Ableitungen im Sequenzenkalkül. Dabei sind c und d sind Konstantensymbole.

(a) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \varphi(c, d)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi(x, x)}$

(b) $\dfrac{\Gamma, \exists y \exists z \varphi(c, y, z), \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \exists y \varphi(x, x, y) \Rightarrow \Delta, \neg\psi(c)}$

Aufgabe 6[●] keine Punkte

Betrachten Sie die Schlussregeln ($\exists \Rightarrow$) und ($\Rightarrow \forall$) aus der Vorlesung.

$$(\exists \Rightarrow) : \frac{\Gamma, \psi(c) \ \Rightarrow \ \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \ \Rightarrow \ \Delta} \quad (*) \qquad (\Rightarrow \forall) : \frac{\Gamma \ \Rightarrow \ \Delta, \psi(c)}{\Gamma \ \Rightarrow \ \Delta, \forall x \psi(x)} \quad (*)$$

$(*)$ wenn c in Γ, Δ und ψ nicht vorkommt

Geben Sie Gegenbeispiele an, die zeigen, dass diese Schlussregeln *nicht* mehr korrekt sind, wenn man die Bedingung weglässt, dass c in Γ, Δ und ψ nicht vorkommen darf. Geben Sie jeweils drei Gegenbeispiele an, um zu zeigen, dass die Schlussregeln schon nicht korrekt sind, wenn c *nur* in Γ (aber weder in Δ noch in ψ), *nur* in Δ (aber weder in Γ noch in ψ) oder *nur* in ψ (aber weder in Γ noch in Δ) vorkommen darf.