Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

Sommersemester 2023

11. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 4. Juli um 18:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung) — 15 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 11“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — 5 Punkte

Verwenden Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik, um die folgende Aussage zu beweisen:
Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ Klassen von τ-Strukturen mit $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$, sodass $\mathcal{K} = \mathsf{Mod}(\psi)$ endlich axiomatisierbar ist, und sowohl $\mathcal{K}' = \mathsf{Mod}(\Phi_1)$ als auch $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}' = \mathsf{Mod}(\Phi_2)$ jeweils unendlich axiomatisierbar sind. Dann ist $\mathcal{K}'$ bereits endlich axiomatisierbar.

Aufgabe 3 — $13 + 2 = 15$ Punkte

Im Folgenden seien 0 und 1 Konstantensymbole, f ein einstelliges Funktionssymbol, $+$ und $\cdot$ zweistellige Funktionssymbole, sowie $\sim$, E und $<$ zweistellige Relationssymbole. Sie dürfen die Aussagen aus Aufgabe 2 und Aufgabe 5 hier verwenden, auch wenn Sie die Aufgaben nicht bearbeitet haben.

(a) Geben Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an. Falls die Klasse nicht axiomatisierbar oder nicht endlich axiomatisierbar ist, beweisen Sie dies mit einer Methode Ihrer Wahl.

(i) die Klasse der $\{\sim\}$-Strukturen $(A, \sim)$, in denen $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A mit höchstens 3 Äquivalenzklassen ist, die alle endlich sind

(ii) die Klasse der ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit unendlich vielen isolierten Knoten

Begriffserklärung: Isolierte Knoten sind Knoten, die keine Nachbarn haben.

(iii) die Klasse der partiellen Ordnungen $(A, <)$, in denen jede Antikette höchstens endlich viele Elemente hat

Begriffserklärung: Eine *Antikette* in einer partiellen Ordnung $(A, <)$ ist eine Menge $K \subseteq A$, sodass für alle $a, b \in K$ mit $a \neq b$ stets weder $a < b$ noch $b < a$ gilt, das bedeutet, die Elemente der Antikette sind paarweise unvergleichbar.

(iv) $\{(A, f) \mid$ für jede endliche Teilmenge $A_0 \subseteq A$ gilt $|f(A_0)| \geq |A_0|\}$

Begriffserklärung: Für eine Menge A_0 bezeichnet $f(A_0) := \{f(a) \mid a \in A_0\}$ das *Bild* von A_0 unter f.

(v) $\{(A, +, \cdot, 0, 1) \mid (A, +, \cdot, 0, 1)$ ist isomorph zu einem Körper $(K, +, \cdot, 0, 1)$ mit $\mathbb{R} \subseteq K\}$

(b) Für welche der folgenden Klassen von Strukturen können Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse aus (a) und der Aussage aus Aufgabe 2 sofort folgern, dass sie gar nicht axiomatisierbar sind? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

Falls Sie die Aussage aus Aufgabe 2 *nicht* anwenden können, begründen Sie jeweils kurz, wieso. In dem Fall müssen Sie *nicht* beantworten, ob die Klasse axiomatisierbar ist oder nicht.

(i) die Klasse der $\{\sim\}$-Strukturen $(A, \sim)$, in denen $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A mit höchstens 3 Äquivalenzklassen ist, von denen mindestens eine unendlich ist

(ii) die Klasse der ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit nur endlich vielen isolierten Knoten

(iii) die Klasse der partiellen Ordnungen $(A, <)$, in denen eine unendliche Antikette existiert

Aufgabe 4* 6* Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ der geordnete Körper der reellen Zahlen. Verwenden Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik, um zu beweisen, dass es einen zu $\mathfrak{A}$ elementar äquivalenten geordneten Körper $\mathfrak{B} = (B, +, \cdot, 0, 1, <)$ gibt, der zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Für jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ gibt es ein „entsprechendes" Element $c_r \in B$, genauer gesagt, $r \mapsto c_r$ ist eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach B. Insbesondere ist B auch überabzählbar.
- Für alle FO($\{+, \cdot, 0, 1, <\}$)-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und alle $r_1, \dots, r_n \in R$ gilt, dass

$$\mathfrak{A} \models \varphi(r_1, \dots, r_n) \quad \text{genau dann, wenn } \mathfrak{B} \models \varphi(c_{r_1}, \dots, c_{r_n}).$$

- Es gibt ein „unendlich kleines" Element $b \in B$, das bedeutet, in $\mathfrak{B}$ gilt zwar $0 < b$, aber auch $b < c_r$ für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 5● keine Punkte

Verwenden Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik, um die folgende Aussage zu beweisen:

Sei $\mathcal{K} = \mathsf{Mod}(\Phi)$ eine Klasse von τ-Strukturen, die durch das unendliche Axiomensystem Φ axiomatisiert wird. Wenn $\mathcal{K}$ endlich axiomatisierbar ist, dann gibt es bereits eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, sodass $\mathcal{K} = \mathsf{Mod}(\Phi_0)$.