Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

Sommersemester 2023

12. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 11. Juli um 18:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung) 10 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 12" zu absolvieren.

Aufgabe 2 12 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir nur Transitionssysteme der Form $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$, wobei E die einzige Kantenrelation ist und $P, Q \subseteq V$ atomare Eigenschaften sind.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Transitionssystemen $\mathcal{K}$ mit ausgewähltem Knoten v durch eine modallogische Formel definierbar sind. Geben Sie für die definierbaren Eigenschaften jeweils eine Formal an und erklären Sie kurz die Idee Ihrer Formel.

(a) Der Knoten v hat mehr Q-Nachfolger als P-Nachfolger.

Begriffserklärung: Mit „mehr" ist hier die Anzahl gemeint. Die Anzahl der Nachfolger kann auch unendlich sein, unendlich ist „mehr" als jede endliche Anzahl. Sollte v sowohl unendlich viele Q-Nachfolger als auch unendlich viele P-Nachfolger haben, dann ist die Anzahl der Q-Nachfolger *nicht* „mehr" als die Anzahl der P-Nachfolger, ungeachtet der genauen Mächtigkeiten.

(b) Der Knoten v hat mindestens zwei verschiedene P-Nachfolger, von denen einer zusätzlich in Q ist und der andere nicht in Q ist.

(c) Es gibt von v aus *keinen* maximalen Weg der Länge 3.

(d) Der Knoten v liegt auf einem gerichteten Dreieck.

Begriffserklärung: Ein *gerichtetes Dreieck* (v_1, v_2, v_3) besteht aus drei paarweise verschiedenen Knoten, die in eine Richtung verbunden sind, also $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1) \in E$.

(e) Alle von v aus erreichbaren Knoten sind in P und v hat einen Vorgänger, der keine P-Nachfolger hat.

(f) Es gibt von v aus beliebig lange, endliche Wege.

Begriffserklärung: Das bedeutet, es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Weg von v aus der Länge *mindestens* n.

Erklärungen der Grundbegriffe: Ein *Nachfolger* von v ist ein Knoten w mit $(v, w) \in E$, damit sind also direkte Nachfolger gemeint und ein Knoten kann sein eigener Nachfolger sein. Falls w ein Nachfolger von v ist, der zusätzlich in P ist, dann nennen wir w einen P*-Nachfolger* von v, Q-Nachfolger sind analog definiert. Insbesondere schließt das nicht aus, dass ein P-Nachfolger w von v zusätzlich auch in Q

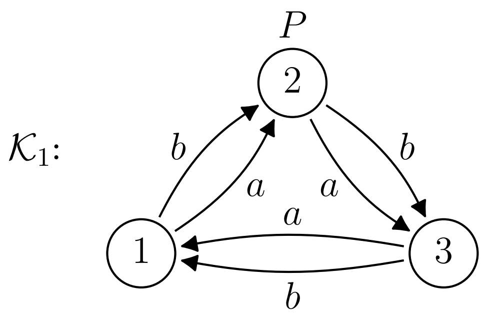
sein darf, dann wäre w gleichzeitig ein P-Nachfolger und ein Q-Nachfolger von v. Ein *Terminalknoten* ist ein Knoten, der keine Nachfolger hat. *Vorgänger* sind analog zu Nachfolgern definiert.

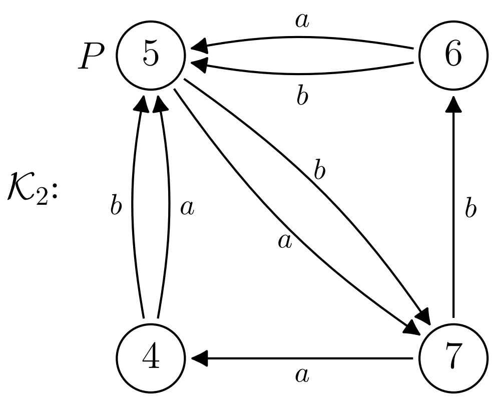
Ein *Weg* der Länge $n \in \mathbb{N}$ von v_0 nach v_n ist eine Folge von Zuständen $(v_0, \dots, v_n)$, sodass jeweils $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $0 \leq i < n$ gilt. Wege sind gerichtet und Wiederholungen sind erlaubt. Es sind auch unendliche Wege $(v_0, v_1, \dots)$ möglich. Ein Weg ist *maximal*, wenn er sich nicht zu einem längeren Weg erweitern lässt, also wenn der Weg unendlich ist oder in einem Terminalknoten endet.

Wir sagen, dass w von v aus *erreichbar* ist, wenn es einen Weg von v nach w gibt. Insbesondere ist jeder Knoten v von sich selbst aus erreichbar, da es den Weg (v) der Länge 0 von v nach v gibt.

Aufgabe 3 4 Punkte

Geben Sie die größte Bisimulation Z zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ an. Geben Sie für alle $(v, w) \notin Z$ zusätzlich eine trennende ML-Formel ψ_{vw} mit minimaler Modaltiefe an.





Aufgabe 4 4 Punkte

(a) In dieser Teilaufgabe betrachten wir nur Formeln für Transitionssysteme der Form $\mathcal{K} = (V, E)$, es stehen also *keine* atomaren Eigenschaften zur Verfügung und es gibt *nur eine* Kantenrelation E.

Geben Sie mit kurzer Begründung eine erfüllbare modallogische Formel $\psi \in \mathrm{ML}$ an, sodass in jedem Modell $\mathcal{K}, v$ von ψ *mindestens* 4 verschiedene Zustände von v aus erreichbar sind.

(b) Wir betrachten in dieser Teilaufgabe wieder Formeln für beliebige Transitionssysteme $\mathcal{K}$ der Form $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a \in A}, (P_i)_{i \in I})$, die Formeln dürfen hier also wieder beliebig viele atomare Eigenschaften P_i und Aktionen a verwenden.

Stellen Sie mit kurzer Begründung eine erfüllbare modellogische Formel $\varphi \in \mathrm{ML}$ auf, sodass jedes Modell $\mathcal{K}, v$ von φ *höchstens* 4 verschiedene Zustände hat, oder beweisen Sie, dass das nicht möglich ist.

Aufgabe 5[●] keine Punkte

Seien $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ zwei beliebige Kripkestrukturen. Zeigen Sie, dass es stets eine bezüglich der Teilmengenbeziehung $\subseteq$ *größte* Bisimulation Z^* gibt, das bedeutet, für alle Bisimulationen Z gilt $Z \subseteq Z^*$.

Hinweis: Betrachten Sie eine beliebige Menge von Bisimulationen und zeigen Sie, wie sich daraus eine Bisimulation konstruieren lässt, die alle Bisimulationen aus der Menge enthält.