Aufgabe 1

Eine Boolesche Funktion $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ist *monoton*, wenn für alle n-Tupel $\overline{a}, \overline{b} \in \{0,1\}^n$ aus $\overline{a} \le \overline{b}$ auch $f(\overline{a}) \le f(\overline{b})$ folgt. Dabei bedeutet $\overline{a} \le \overline{b}$ für Tupel $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\overline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ aus $\{0,1\}^n$, dass $a_i \le b_i$ für alle $1 \le i \le n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Verkettung monotoner Boolescher Funktionen wieder monoton ist, also dass $h\colon \overline{x} \mapsto g(f_1(\overline{x}), \dots, f_m(\overline{x}))$ monoton ist, wenn die Funktionen $g\colon \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ und $f_1, \dots, f_m\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ alle monoton sind.

(b) Sind die folgenden Mengen funktional vollständig?

(i) $\{\mathrm{sel}, 0, 1\}$, wobei sel definiert ist als

$$\mathrm{sel}\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}, \quad \mathrm{sel}(x,y,z) := \begin{cases} y & \text{falls } x = 0 \quad \text{und} \\ z & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

(ii) $\{0, 1, \vee, \wedge\}$

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Modelle von Horn-Klauseln

$$C := (X_1 \wedge \dots \wedge X_n) \to Y \qquad \text{bzw.} \qquad C := (X_1 \wedge \dots \wedge X_n) \to 0$$

unter Schnitt abgeschlossen sind, d.h. wenn $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2\colon \tau(C) \to \{0,1\}$ Modelle von C sind, dann ist auch deren *Schnitt* $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)\colon \tau(C) \to \{0,1\}$ ein Modell von C, wobei der Schnitt definiert ist mit

$$(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X) := \min\{\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X)\} \quad \text{für } X \in \tau(C).$$

(b) Sind die folgenden Formeln jeweils äquivalent zu einer Horn-Formel?

(i) $\varphi_i := (Z \wedge (X \oplus Y)) \vee \neg(X \vee Y \vee Z)$

(ii) $\varphi_{ii} := (X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (Y \vee \neg Z)$

Aufgabe 3

Nutzen Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, um die folgende Folgerungsbeziehung nachzuweisen oder eine Interpretation zu finden, die die Folgerungsbeziehung widerlegt.

$$\underbrace{\{\neg G \to \neg A, (F \wedge E) \to D, C \wedge F, \neg E \vee \neg C \vee B, C \leftrightarrow E\}}_{=:\Phi} \models \underbrace{B \wedge A}_{=:\psi}$$