Aufgabe 1

(a) Geben Sie alle Substrukturen der Struktur $\mathfrak{A} := (\mathbb{Q}, +, -, \cdot, ^{-1})$ an, wobei die Funktion $^{-1}$ das multiplikative Inverse

$$q^{-1} := \begin{cases} 0 & \text{falls } q = 0 \text{ und} \\ 1/q & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } q \in \mathbb{Q}$$

ist. Begründen Sie kurz, warum es keine weiteren Substrukturen gibt.

(b) Geben Sie alle Redukte von $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, +, -)$ an.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <, |)$, wobei $|$ die Teilbarkeitsrelation ist, d.h. für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a \mid b$ genau dann, wenn b durch a teilbar ist.

Beschreiben Sie in Worten, was die folgenden Formeln jeweils in $\mathfrak{A}$ ausdrücken und beantworten Sie, wenn möglich, ob die Formeln dort erfüllt sind. Für welche Formeln kann man *nicht* bestimmen, ob sie in $\mathfrak{A}$ erfüllt sind und warum?

(a) $\psi_a := \forall x \exists y (x < y)$

(b) $\psi_b := \forall x \exists y (x + y = 0)$

(c) $\psi_c(x) := (x \neq 1) \wedge \forall y (y \mid x \rightarrow (y = 1 \vee y = x))$

Aufgabe 3

Wir betrachten endliche Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Ein nicht-leeres Wort $w = w_0 \dots w_{n-1}$ entspricht der Struktur

$$\mathfrak{B}(w) := (\{0, \dots, n-1\}, <, P_a, P_b),$$

wobei $<$ die übliche lineare Ordnung ist, und $i \in P_s$ genau dann gilt, wenn $w_i = s$. Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen $\mathrm{FO}(\{<, P_a, P_b\})$-Satz an, der diese definiert.

(a) $\{w \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\} \mid w \text{ endet mit einem } b\}$

(b) $\{w \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\} \mid bab \text{ kommt als Infix in } w \text{ vor}\}$

(c) $\{w \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\} \mid bb \text{ kommt } \textit{nicht} \text{ als Infix in } w \text{ vor}\}$

(d) $\{w \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\} \mid \text{hinter jedem } a \text{ in } w \text{ kommt noch mindestens ein } b\}$