Aufgabe 1

Sei $\mathfrak{A} := (A = \{3, 4\}, R, <)$ mit der einstelligen Relationen $R^{\mathfrak{A}} := \{4\}$ und der üblichen Ordnung $<$ auf $\{3, 4\}$. Betrachten Sie den Satz

$$\psi := \forall x(Rx \to \exists y(x < y \land Ry)) \quad \in \mathrm{FO}(\{R, <\}).$$

(a) Geben Sie das Auswertungsspiel $\mathrm{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ an und bestimmen Sie die Gewinnregionen W_σ der beiden Spieler $\sigma \in \{0, 1\}$. Ist das Spiel fundiert? Ist es determiniert?

(b) Beantworten Sie, ob $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt oder nicht, indem Sie eine Gewinnstrategie für einen der Spieler im Auswertungsspiel $\mathrm{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ angeben. Ist das die einzige mögliche Gewinnstrategie?

Aufgabe 2

Eine Struktur $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ heißt *starr*, wenn die Menge der Automorphismen $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ auf $\mathfrak{A}$ nur den trivialen Automorphismus id_A enthält. Beweisen Sie: Wenn alle $a \in A$ in $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ elementar definierbar sind, dann ist $\mathfrak{A}$ starr.

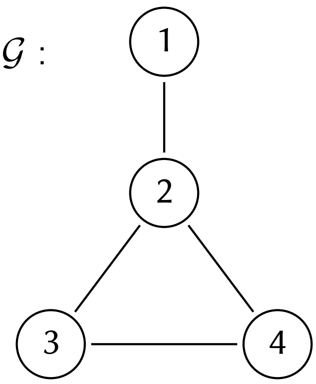
Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die angegebene Konstante, Funktion oder Relation in der gegebenen Struktur elementar definierbar ist.

(a) die Konstante 2 in $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ bzw. in $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \cdot)$

(b) die Menge $\{3, 4\}$ im folgenden ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$

$\mathcal{G}$:



(c) die ggT-Funktion in $(\mathbb{N}_{>0}, \cdot, \leq)$

Begriffserklärung: Die Funktion $\mathrm{ggT}\colon \mathbb{N}_{>0}^2 \to \mathbb{N}_{>0}$ bildet zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ auf ihren größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(m, n)$ ab.

(d) die Relation $E := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)\}$ in $(\mathbb{C}, +)$