Aufgabe 1

Sei 0 ein Konstantensymbol, s ein einstelliges Funktionssymbol, a ein zweistelliges Funktionssymbol und R ein einstelliges Relationssymbol. Wir betrachten die folgende Menge T von atomaren Sätzen.

$$\begin{aligned} T := {} & \{a00 = 0, as0s0 = ss0, as00 = s0\} \\ & \cup \{ast_1t_2 = sat_1t_2, at_1st_2 = sat_1t_2 \mid t_1, t_2 \text{ Grundterme}\} \\ & \cup \{Rs^p0 \mid p \in \mathbb{P}\} \end{aligned}$$

Dabei steht s^p0 für den Term $\underbrace{s \dots s}_{p\text{-mal}}0$, und s^00 steht für den Term 0.

(a) Sei Σ der Abschluss von T unter Substitution. Beschreiben Sie Σ.

(b) Beschreiben Sie die Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$. Gilt $\mathfrak{H}(\Sigma) \models T$?

(c) Sei $\sim$ die von Σ induzierte Kongruenzrelation auf $\mathfrak{H}(\Sigma)$. Beschreiben Sie das kanonische Modell $\mathfrak{A}(\Sigma) = (\mathfrak{H}(\Sigma)/{\sim})$ und zeigen Sie, dass es zu einer „bekannten“ Struktur isomorph ist.

Aufgabe 2

Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ definieren wir die Relation $\sim_n$ auf $\mathbb{Z}$ wie folgt:

Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gelte $a \sim_n b$ genau dann, wenn es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $a - b = z \cdot n$.

(a) Zeigen Sie für jedes $n > 0$, dass $\sim_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\sim_n$ auch eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$ ist.

(c) Wie sehen die Faktorstrukturen $\mathfrak{A}/{\sim_n}$, abhängig von n, aus?

Zu welcher „bekannten“ Struktur sind sie jeweils isomorph?