

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 26.10. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung

Aufgabe 1

10 Punkte

Geben Sie an, ob die folgenden Formeln über den Aussagenvariablen X und Y Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

- (a) $(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$ (b) $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Y \rightarrow X)$ (c) $(X \rightarrow \neg Y) \rightarrow \neg Y$
(d) $(\neg X \wedge (X \vee Y)) \leftrightarrow (Y \rightarrow X)$ (e) $(Y \wedge \neg Y) \rightarrow 1$

Aufgabe 2

6 Punkte

- (a) Eine AL-Formel heißt *kontingent* wenn sie erfüllbar aber keine Tautologie ist. Gibt es kontingente Formeln, deren Negation nicht kontingent ist?
(b) Sei $f \in B^3$ eine Boolesche Funktion, für die gilt:

$$f(x, \neg x, x) = f(x, 0, 0) = 1 \text{ und} \\ f(x, x, \neg x) = f(x, 1, 1) = 0.$$

Zeigen Sie, dass f eindeutig bestimmt ist, geben Sie eine AL-Formel $\varphi(X_1, X_2, X_3)$ an, die f definiert, und zeigen oder widerlegen Sie, dass $\{f\}$ funktional vollständig ist.

Aufgabe 3

8 Punkte

Jedem (ungerichteten) Graphen mit Knoten $1, \dots, n$ ordnen wir eine aussagenlogische Interpretation in folgender Weise zu: Jedem Paar $i < k$ von Knoten wird eine Variable X_{ik} zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen i und k gibt.

- (a) Geben Sie für $n = 5$ eine Formel an, welche beschreibt, dass der Grad des Graphen mindestens drei ist, d. h. es gibt einen Knoten mit mindestens drei Nachbarn.
(b) Konstruieren Sie für beliebige n und k Formeln $\varphi_{n,k}$, die ausdrücken, dass der Graph k -regulär ist.
(c) Geben Sie für beliebige n eine Formel ψ_n an, die beschreibt, dass der Graph ein vollständiger bipartiter Graph ist.

Aufgabe 4

6 Punkte

Marion und Lothar haben einige Freunde zum Essen eingeladen und folgende Rückmeldungen erhalten:

- (a) Wenn Antonia kommt, bringt sie Benjamin mit;
- (b) Mindestens einer der Zwillinge Claudius und Desirée kommt;
- (c) Entweder kommt Benjamin oder Emil, aber nicht beide;
- (d) Entweder kommen Emil und Desirée oder beide nicht;
- (e) Wenn Claudius kommt, dann kommen auch Desirée und Antonia.

Finden Sie durch geeignete Formalisierung in der Aussagenlogik heraus, wer zum Abendessen kommt und wer nicht.