

## 2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 2.11. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung

### Aufgabe 1

10 Punkte

Zu zwei aussagenlogischen Interpretationen  $\mathfrak{I}_1$  und  $\mathfrak{I}_2$  über dem gleichen Definitionsbereich  $\sigma$  definieren wir eine neue aussagenlogische Interpretation  $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 : \sigma \rightarrow \{0, 1\}$  durch

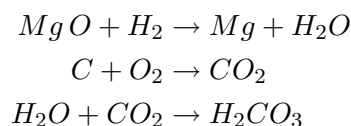
$$(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathfrak{I}_1(X) = 1 \text{ und } \mathfrak{I}_2(X) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass für jede Horn-Formel  $\varphi$  der Schnitt zweier Modelle wieder ein Modell ist, d.h. wenn  $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$  und  $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$ , dann auch  $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \models \varphi$ .
- (b) Welche der folgenden Formeln sind zu einer Horn-Formel äquivalent? Beweisen Sie Ihre Antwort!
- (i)  $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Z)$ ;    (ii)  $(X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow \neg Z)$ ;    (iii)  $X \vee Z \vee (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$ .

### Aufgabe 2

6 Punkte

In einem Chemielabor stehen die Apparaturen zur Verfügung, um folgende chemische Reaktionen durchzuführen:



Ferner sind in dem Labor folgende Grundstoffe vorhanden:  $MgO$ ,  $H_2$ ,  $O_2$  und  $C$ . Man beweise (durch geeignete Anwendung des Erfüllbarkeitsalgorithmus für Hornformeln), dass es unter diesen Voraussetzungen möglich ist,  $H_2CO_3$  herzustellen.

### Aufgabe 3

6 Punkte

Sei  $\Phi \models \varphi$  und  $\Psi \models \psi$ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- (a)  $\Phi \cup \Psi \models \varphi \wedge \psi$ ,
- (b)  $\Phi \cap \Psi \models \varphi \vee \psi$ ,
- (c)  $\Phi \models \varphi \rightarrow \psi$ ,
- (d)  $\Psi \models \varphi \rightarrow \psi$ .

#### Aufgabe 4

6 Punkte

Wir definieren eine (partielle) Ordnung  $\leq$  über Formeln durch  $\varphi \leq \psi$  genau dann, wenn  $\varphi \rightarrow \psi$  eine Tautologie ist. Weiter sei  $\varphi < \psi$  genau dann, wenn  $\varphi \leq \psi$  und  $\psi \not\leq \varphi$ .

- (a) Zeigen Sie, dass die so definierte Ordnung dicht ist, d.h. zu je zwei Formeln  $\varphi < \psi$  existiert eine Formel  $\vartheta$  mit  $\varphi < \vartheta < \psi$ .  
Hinweis: Konstruieren Sie  $\vartheta$  aus  $\varphi$  und  $\psi$  mittels einer Aussagenvariable, die weder in  $\varphi$  noch in  $\psi$  vorkommt.
- (b) Zeigen Sie, dass eine unendliche aufsteigende Kette  $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \dots$  existiert.
- (c) Zeigen Sie, dass es für je zwei Formeln  $\varphi$  und  $\psi$  eine kleinste Formel  $\vartheta$  gibt, so dass  $\varphi \leq \vartheta$  und  $\psi \leq \vartheta$ , d.h. für alle Formeln  $\eta$  mit  $\varphi \leq \eta$  und  $\psi \leq \eta$  gilt auch  $\vartheta \leq \eta$ .

#### Aufgabe 5

8 Punkte

Eine Formelmengemenge  $\Phi$  heißt *unabhängig*, wenn für kein  $\varphi \in \Phi$  gilt:  $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$ .

- (a) Wann ist eine Menge, die nur aus einer einzelnen Formel besteht, unabhängig?
- (b) Zeigen Sie, dass jede endliche Formelmengemenge eine äquivalente unabhängige Teilmenge enthält.
- (c) Gilt diese Eigenschaft auch für unendliche Mengen? Betrachten Sie dazu die Menge

$$\Phi = \left\{ \bigwedge_{0 \leq i \leq n} X_i : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Geben Sie eine zu  $\Phi$  äquivalente, unabhängige Formelmengemenge an.

- (d) Beweisen Sie, dass eine Formelmengemenge genau dann unabhängig ist, wenn alle ihre endlichen Teilmengen unabhängig sind.