Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 9.11. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung

Aufgabe 1 5 Punkte

Das *n-Damen Problem* besteht darin, auf einem $n \times n$- Schachbrett n Damen so aufzustellen, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Überlegen Sie sich eine geeignete Modellierung für Aufstellungen und formalisieren Sie dann das Problem in der Aussagenlogik.

Aufgabe 2 9 Punkte

(a) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(C \vee B) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C).$$

(b) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel allgemeingültig ist:

$$(\neg C \wedge B) \vee A \vee (C \wedge \neg D \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge \neg A) \vee (C \wedge D).$$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende semantische Folgerung anhand der Resolutionsmethode:

$$(\neg E \vee C) \wedge (B \vee E \vee C \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee E) \wedge (\neg C \vee A) \wedge (B \vee C \vee D) \models (C \wedge A).$$

Aufgabe 3 6 Punkte

Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ ist *endlich axiomatisierbar*, wenn eine endliche Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{AL}$ existiert, welche die gleichen Modelle hat wie Φ.

Sei $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Formelmenge, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, $\varphi_{n+1} \models \varphi_n$ aber $\varphi_n \not\models \varphi_{n+1}$. Zeigen Sie, dass Φ nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4 6 Punkte

Sei $\Phi_1 \subsetneq \Phi_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \Phi_n \subsetneq \cdots$ eine zunehmende unendliche Mengenfolge von aussagenlogischen Formeln. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\Phi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$ genau dann erfüllbar ist, wenn alle Φ_n erfüllbar sind.

Aufgabe 5 6 Punkte

Das *Schubfachprinzip* von Dirichlet (1805-1859) ist ein unschätzbares Werkzeug der Kombinatorik. In seiner einfachsten Variante lautet es: Werden $n + 1$ Perlen auf n Schubfächer verteilt, so gibt es wenigstens ein Schubfach mit mehr als einer Perle.

(i) Formulieren Sie dieses Prinzip in der Aussagenlogik für einen gegebenen Wert $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Zeigen Sie durch Resolution, dass das Prinzip für $n = 2$ gilt.