Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 23.11. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung

Aufgabe 1 10 Punkte

Welche der folgenden Mengen sind abzählbar, welche überabzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) Die Menge aller Wörter über einem endlichen Alphabet Σ.

(b) Die Menge aller Interpretationen $\mathfrak{I} : \{X_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \to \{0, 1\}$.

(c) Die Menge aller Knotenfärbungen mit k Farben von Graphen mit Knotenmenge $\mathbb{N}$.

(d) Die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{Q}$.

(e) Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen.

Aufgabe 2 10 Punkte

Geben Sie zu je zwei der folgenden Mengen an, ob sie gleichmächtig sind oder, falls nicht, welche Menge die größere Kardinalität hat. ($|A| \leq |B|$, wenn eine injektive Funktion $f : A \to B$ existiert.)

$A := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, die Menge aller Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$;

$B := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ : \ \text{es gibt nur endlich viele } n \text{ mit } f(n) \neq 0\}$;

$C := \mathbb{N}[X]$, die Menge aller Polynome in einer Unbekannten mit Koeffizienten in $\mathbb{N}$;

D : die Menge aller binären Relationen über dem Universum $\mathbb{R}$;

E : die Menge aller monoton steigenden Folgen von natürlichen Zahlen.

Hinweis. Sie können das Cantor-Schröder-Bernstein-Theorem benutzen: Sind $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektive Funktionen, dann gibt es auch eine Bijektion $h : A \to B$.

Aufgabe 3 6 Punkte

Sei $\mathfrak{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B und sei $A \subseteq B$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte kleinste Substruktur $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ gibt, welche A enthlt. Wir nennen $\mathfrak{C}$ die von A erzeugte Substruktur von $\mathfrak{B}$.

(b) Sei $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, \mathrm{succ})$ die Struktur mit einem einstelligen Funktionssymbol succ, das durch die Nachfolgefunktion interpretiert wird, d. h. $\mathrm{succ}^{\mathfrak{B}}(n) = n + 1$. Wie groß ist die Menge der Substrukturen von $\mathfrak{B}$? Geben Sie zu jeder Substruktur $\mathfrak{C}$ die kleinste Menge A an, die $\mathfrak{C}$ erzeugt.

(c) Zeigen Sie: Wenn τ und A abzhlbar sind (und $\mathfrak{B}$ beliebig), dann ist die von A erzeugte Substruktur von $\mathfrak{B}$ ebenfalls abzhlbar.

Aufgabe 4 8 Punkte

Eine *Wohlordnung* ist eine lineare Ordnung $(A, \leq)$ ohne unendliche absteigende Ketten $a_0 > a_1 > \ldots$ von Elementen $a_i \in A$. Die *Summe* zweier Wohlordnungen $(A, \leq_0)$ und $(B, \leq_1)$ ist definiert als $(C, \leq) = (A, \leq_0) + (B, \leq_1)$ mit

- $C := (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$ und
- $(i, a) \leq (k, b) \quad :\text{gdw} \quad$ entweder ist $i < k$ oder ($i = k$ und $a \leq_i b$).

(a) Zeigen Sie, dass die Summe zweier Wohlordnungen ebenfalls eine Wohlordnung ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Wohlordnungen $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(\mathbb{N}, \leq) + (\mathbb{N}, \leq)$ gleichmächtig sind.

(c) Beweisen Sie, dass eine lineare Ordnung $(A, \leq)$ genau dann eine Wohlordnung ist, wenn jede Teilmenge $B \subseteq A$ ein minimales Element enthält.

(d) Geben Sie eine Ordnung $\leq$ an, so dass $(\mathbb{Q}, \leq)$ eine Wohlordnung ist, oder beweisen Sie, dass eine solche Ordnung nicht existiert.